*

Egenskaper

Del I

*

Morten Rognes

1986

*

Filosofisk institutt, Universitetet i Oslo

INNHOLD

§0 Innledning 1
§1 Språket L;e[Δ] 2
§2 Noen kommentarer angående den intuitive tolkningen av de primitive konstruksjonene i L;e[Δ] 3
§3 Teorien E;1. En gjennomgåelse av de viktigste grunnsetningene. 6
§4 Noen terminologiske bemerkninger. 11
§5 Forholdet mellom egenskaper og begreper. 12
§6 Noen bemerkninger angående aksiomatiseringen av E;1 13
§7 Boolske operasjoner over klassen av egenskaper. Noen viktige teoremer i teorien E;1 14
§8 Instanser av egenskaper. 20
§9 Rigide egenskaper. 23
§10 Om konsistensen til E;1 relativt til ZFCu(L;e) 24
§11 Strukturen til mengden D. 28

§12 Noen kritiske bemerkninger om E;1 29
§13 Noen flere betraktninger over eksistensen til mengden D. 31
§14 Aksiomene i teorien E;3. 32
§15 Noen viktige trekk ved teorien E;3. 32
§16 Konsistensen til E;3 relativt til ZFCu(L;e[Δ]) 36
§17 Forholdet mellom mengder og egenskaper i teorien E;3. 37
§18 Om strukturen til universet av egenskaper. 38
§19 Det kumulative egenskapshierarki og intensjonelle språk. 43
§20 Avsluttende bemerkninger. 45
Copyright beskrivelse 49

§0 Innledning

I et tidligere arbeid, Rognes [2], "En teori om presise deskriptive utsagn", har vi studert og analysert en teori om presise deskriptive utsagn. I dette arbeidet vil vi formulere forskjellige teorier om egenskaper der teoriene er utvidelser av den teorien om utsagn som ble nevnt. Aller først bør det imidlertid bemerkes at lesningen av dette arbeidet forutsetter at leseren har satt seg inn Rognes [2] og også har for hånden Rognes [1] "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære." De logiske og mengdeteoretiske begrepene som vil bli benyttet her er forklart og definert i dette sistnevnte arbeid. Den notasjon og de definisjoner som er innført der vil derfor uten spesielle kommentarer bli brukt når det trengs . Forøvrig er denne notasjon, og de definisjoner det dreier seg om, nokså standardpreget og avviker ikke i særlig grad fra det som er vanlig.[1]

Det er en rekke grunner til at vi har tatt på oss bryderiet med detaljert å utforme og utvikle de teorier om egenskaper som presenteres i dette arbeid. For det første synes det som om en rekke metodologisk sett viktige predikater kan defineres ved hjelp av de primitive predikatene som inngår i de teoriene som vil bli undersøkt, og at en stor mengde med setninger om disse begrepene kan utledes på grunnlag av teoriens aksiomer. Vi vil for eksempel nevne de følgende konstruksjoner: "x er en teori", "x er en deduktivt lukket utsagns-mengde", "x er et hypotetisk deduktivt system relativt til utsagnsmengden Δ", " x er en hypotese relativt til utsagnsmengden Δ", "x er et intepretert første-ordens språk", "x er en begrepsramme". Listen kan imidlertid forlenges betraktelig. For det andre kan teoriene sies å bidra til å avklare forholdet mellom mulige verdener, utsagn, egenskaper og mengder. De torde derfor være av interesse for enhver som er interessert i disse grunnleggende begrepene og de spørsmål om verdens logiske oppbygning, hvilke teorier som kan fremsettes for å beskrive verden, hvilke sider ved virkeligheten som lar seg erkjenne ved hjelp av en begreps-ramme, og andre spørsmål av logisk, ontologisk og erkjennelsesteoretisk art som er forbundet med dem.

Men det er også andre grunner enn de som er nevnt som er et vesentlig motiv bak bestrebelsene på å utforme detaljert de teorier som her blir presentert.

Hvorvidt intensjonale objekter finnes, og med intensjonale objekter siktes her til egenskaper og utsagn av forskjellig art, samt mulige individer og mulige verdener, er et omstridt spørsmål av klart filosofisk karakter. Hvis man ønsker å belyse dette spørsmål virker det rimelig at man forsøker å avklare, og til en viss grad fiksere, de oppfatningene man har om disse størrelsene. En mer systematisk teori om egenskaper og deres relasjon til andre intenjonelle og ekstensjonelle entiteter hvor det innbyrdes forhold mellom teoriens setninger er klargjort, og hvor teoriens forskjellige konsekvenser er utformet så langt som mulig, kan da være til hjelp for en som ønsker å argumentere mot eksistensen av slike stør-relser. Med en slik teori foran seg kan en person få et klarere bilde av det vedkommende ønsker å gå i mot. Sett i et slikt perspektiv synes dette arbeid å ha en viss filosofisk relevans.

Angående egenskaper er det også en rekke spørsmål som det er svært nærliggende å stille om man antar at de eksisterer. De følgende kan nevnes: Finnes det flere egenskaper enn utsagn? Finnes det, for en gitt egenskap a, en mengde som inneholder alle de egenskapene som er implisert av a? Finnes det, i noen rimelig betydning av ordet "flere" , flere egenskaper en mengder? Er egenskaper en underart av mengder? Er det mulig å inndele egenskapene til en gjenstand i tilfeldige og nødvendige egenskaper? Av hva slags natur er i så fall de

[1] Det bør understrekes at full fortrolighet med de nevnte arbeider er en forutsetning for lesningen av dette essay. Vi gjør også oppmerksom på at studiet av dette skrift krever tålmodighet, velvilje og konsentrasjon.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

nødvendige egenskapene og hva særmerker dem? Finnes det noen objekter som i noen forstand er egenskapsløse? Finnes det noen gjenstander som har flere egenskaper en noen andre gjenstander? Kan de objekter, funksjoner, klas-ser og relasjoner man arbeider med innenfor de ulike deler av matematikken oppfattes som egenskaper av forskjellig art? Finnes egenskapen å være et sant deskriptivt utsagn? Hva slags egenskaper vil i så fall denne egenskapen ha?

Så langt er bare et lite utvalg av spørsmål nevnt. Når det gjelder disse spørsmål synes det imidlertid korrekt å si at dersom de teoriene som etterhvert vil bli eksakt definert forutsettes å være riktige gir de et svar på i alle fall noen av dem. I det minste kan de bidra til å kaste noe lys over disse spørsmålene. Dette skulle fremgå klarere når man ved slutten av lesningen av dette arbeid vender tilbake til dem. Siden spørsmålene er av en filosofisk karakter, og de teorier som tas opp til drøftelse kan bidra med tentative svar, synes også dette å underbygge den påstand at dette arbeid har en viss filosofisk relevans.

De teoriene som hovedsakelig vil bli behandlet i dette arbeid betegnes med "E;1", "E;2" og "E;3". Visse varianter av dem vil også bli diskutert. Av disse tre teoriene vil det bli anført visse grunner for å hevde at E;3 er den teorien som fra en intuitiv synsvinkel er den mest tilfredsstillende.[2]

§1 Språket L;e[Δ]

Teoriene E;1 – E;3 er alle teorier med det samme språk. Dette vil nå bli eksakt definert.

Det første-ordens språket som har følgende to predikater, nemlig (1) "x er en mengde", som forkortes med "M(x)", og (2) "x er et element i mengden y", som forkortes med "xêy", som de eneste ikke-logiske predikater betegnes her med "L;e". Det vil bli omtalt som "språket for mengdelære."

Man kan nå betrakte den følgende rekke med predikater:

(3) "x er en mulig verden". Dette predikatet forkortes med "MV(x)"
(4) "x er et utsagn". Dette predikatet forkortes med "Ut(x)"
(5) "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant". Når det gjelder dette predikatet benyttes forkortelsen "True(x,y)"
(6) "x er en egenskap av grad y". Denne konstruksjonen forkortes med "At;y(x)"
(7) "x er et mulig individ som har egenskapen y i verdenen w". I forbindelse med denne konstruksjonen benyttes forkortelsen "H(x,y,w)"
(8) "x er et mulig individ" . For dette predikat benyttes forkortelsen "MI(x)"

Den mengden med predikatkonstruksjoner som inneholder predikatene (3) – (8) og bare dem vil her bli betegnet med "Δ". Språket til de teoriene som vil bli tatt opp til diskusjon kan nå defineres som det første-ordens språket som fremkommer som resultat når det ikke-logiske vokabularet til språket for mengdelære, L;e, utvides med predikatene i mengden Δ og bare dem. I dette arbeid vil uttrykket "L;e[Δ]" betegne dette språket. Forøvrig gjøres det

[2] Sammendrag av teoriene E;1, E;2 og E;3 er gitt i Rognes [3] og [4]. Det mengdeteoretiske system som teoriene E;1 – E;3 er utvidelser av er detaljert beskrevet og forklart i Rognes [1] og [5]. Endel intepretasjonsteoremer og konsistensresultater er gitt i Rognes [5].

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

oppmerksom på at notasjonen "L[X]" hvor L er et første-ordens språk og X en mengde med ikke-logiske predikatkonstruksjoner er forklart i §4 i Rognes [1]. Noen ytterligere forklaringer skulle derfor strengt tatt være unødvendige her.

§2 Noen kommentarer angående den intuitive tolkningen av de primitive konstruksjonene i L;e[Δ]

Begrepet mulig verden, samt begrepet utsagn og begrepet om sannhet i en mulig verden, ble inngående kommentert i Rognes [2]. Det har derfor mindre interesse å gjenta denne utredningen her. Av konstruksjonene som ble presentert i forrige paragraf vil vi derfor innskrenke oss til å kommentere
(6) – (8).

Innledningsvis kan det være på sin plass å si noen ord om konstruksjonen "x er et mulig individ". Vi oppfatter et mulig individ som enhver entitet som det er logisk mulig at eksisterer. Dette innebærer at noe er et logisk mulig individ hvis og bare hvis det finnes en mulig verden hvor det eksisterer. Fysiske objekter som faktisk ikke eksisterer, men som det er logisk mulig at kunne eksistere vil da f. eks. kunne regnes som mulige individer. Merk at vi likevel ikke uten videre vil definere mulig individ som en entitet som det er mulig å tenke seg, eller som det er mulig å dikte opp ved fantasiens hjelp. Vi utelukker altså ikke på forhånd den mulighet at det kan finnes mulige individer som det er umulig å danne seg noe forestillingsbilde av, som det er umulig å anskueliggjøre eller som det kanskje kan være umulig i det hele tatt å omtale. Heller ikke gjør vi hva som som skal regnes som et mulig individ avhengig av hva et eller annet menneske ved et gitt tidspunkt er i stand til å forestille seg. Begrepet mulig individ oppfattes derfor her som et strengt logisk, objektivt begrep, uten subjektivistiske trekk.[3]

La oss dernest si noen ord om predikat-konstruksjonen "x er en egenskap av grad y". Det er meningen at graden til en egenskap alltid skal kunne angis ved et naturlig tall $n \geq 1$. Videre tenker vi oss at de aller fleste meningsfulle n-ære predikatkonstruksjoner ($n \geq 1$) betegner en egenskap av grad n. Tenker man seg derfor et språk som f. eks. inneholder konstruksjonen "x er en rød materiell gjenstand" vil den entiteten som denne konstruksjonen betegner være egenskapen å være en rød materiell gjenstand. Tilsvarende vil predikatet "x er en blå materiell gjenstand" betegne en egenskap, nemlig egenskapen å være en blå materiell gjenstand, som selvfølgelig er forskjellig fra egenskapen å være en rød materiell gjenstand. Begge disse egenskapene vil være eksempler på egenskaper av grad 1. I det følgende kaller vi dem for unære eller monadiske egenskaper. Studerer man et binært predikat, som f. eks. "x er et fysisk objekt som veier mer enn det fysiske objektet y", betegner dette en egenskap av grad 2 eller hva som også vil bli omtalt som en binær egenskap. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres for egenskaper av grad n der $n>2$.[4]

Tenker man seg nå at man innfører konstruksjonen, "Egenskapen å være en x slik at p", vil dette være en termdannende konstruksjon på formler. La oss her forkorte denne

---

[3] Det bør imidlertid bemerkes at det ikke fra noe av det vi påstår følger at oppdiktede personer, personer i romaner, skuespill etc. er mulige individer selvom teorien ikke utelukker dette. Det er f.eks. konsistent med alle teoriene som fremtilles i dette arbeid å anta at egenskapen å være identisk med Hedda Gabler har en tom ekstensjon i alle mulige verdener, selvom det i noen mulige verdener kan eksistere personer som har alle de trekk som tilskrives personene i Ibsens skuespill.

[4] Vi antar at leseren ikke vil ha noen vanskeligheter med å angi andre predikatkonstruksjoner som betegner egenskaper.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

konstruksjonen med "(∂x)p". Er da p en lukket formel i et første-ordens språk vil vanligvis "(∂x)p" være et navn på en egenskap, men ikke alltid.

Tilsvarende kan man også innføre konstruksjonen "Egenskapen å være et par av objekter x,y slik at p" som til ethvert par av variabeltegn x,y og enhver lukket formel p tilordner en term som er et navn på en binær egenskap. La oss forkorte denne konstruksjonen med "(∂xy)p". Brukes da "V(x,y)" som forkortelse for det binære predikatet "x er et fysisk objekt som veier mer enn det fysiske objektet y" vil (∂xy)V(x,y) være egenskapen å være et par av objekter x,y slik at x er et fysisk objekt som veier mer enn det fysiske objekt y. Som nevnt vil dette være en binær egenskap.

Studerer man nå skjemaet (1) (Ey)(At;1(y) & y=(∂x)p), der p er en formel som ikke inneholder y som fri variabel, er det imidlertid mulig å vise at denne ikke holder generelt. Innfører man predikatet "x har egenskapen y", og forkorter det med "h(x,y)", og antar man dessuten som et generelt prinsipp den følgende "konkretiseringslov":

(2) h(y, (∂x)p(x)) <–> p(y)

ser man forholdsvis lett at man kan utlede en motsigelse om man for "p" i (1) setter inn uttrykket "At;1(x) & ¬h(x,x)". Det kan derfor ikke være slik at enhver predikatkonstruksjon betegner en egenskap.

Beviset for at (1) og (2) leder til en motsigelse kan føres slik: Setter man "At;1(x) & ¬h(x,x)" inn for "p" i (1) får man:

(Ey)(At;1(y) & y=(∂x)(At;1(x) & ¬h(x,x)))

Fra dette følger at man for et eller annet objekt y må ha:

(3) At;1(y) & y=(∂x)(At;1(x) & ¬h(x,x))

Det foreligger da to muligheter: (a) Man har h(y,y). Da følger imidlertid ved hjelp av (3) at: h(y, (∂x)(At;1(x) & ¬h(x,x))). Men fra dette og prinsippet (2) følger:
At;1(y) & ¬h(y,y). Dette strider åpenbart mot antagelsen at h(y,y). (b) Man har på den annen side at ¬h(y,y). Da har man, igjen ved hjelp av (3), at:
At;1(y) & ¬h(y,y) Fra dette og (2) følger: h(y, (∂x)(At;1(x)&¬h(x,x))). Herav har man så ved hjelp av (3) at h(y,y). Men dette strider mot at ¬h(y,y).

I begge tilfelle er det altså mulig å utlede en motsigelse. Dette viser at det ikke er mulig å beholde begge skjemaene uten noen restriksjoner.

Forøvrig ser man at (1) og (2) er helt analoge med to velkjente prinsipper i mengdelæren. (1) svarer til det naive komprehensjons-skjema :

(i) (Ey)(M(y) & y =Mg(x: p(x))).

Prinsippet (2) svarer til:

(ii) yêMg(x: p(x)) <–> p(y).

Setter man inn "¬xêx" for for "p(x)" i disse to formlene utleder man lett en motsigelse, nemlig Russels paradox. Ønsker man derfor å bygge opp en logisk sett uangripelig mengdelære må man altså legge visse restriksjoner på disse prinsippene. En annen mulighet er at man beholder prinsippene, men foretar visse endringer i den tilgrunnliggende logiske teori. Det meste vanlige er at man gir opp (i). Noe helt tilsvarende vil gjelde i egenskapsteorien om man tenker seg at man innfører operatoren ∂ og predikatet h. Det mest naturlige vil da være at man legger visse restriksjoner på prinsippet (1).

Det kan være hensiktsmessig å kommentere ytterligere noen trekk ved det egenskapebegrep som legges til grunn i dette arbeidet. Anta x er en egenskap av grad 1 og anta videre at w er en eller annen logisk mulig verden. Intuitivt virker det da svært rimelig å snakke om alle de mulige individene som har egenskapen x i verdenen w. Mengden av alle de mulige individer som har egenskapen x i verdenen w skal her kalles for "ekstensjonen til x i verdenen w" og i det følgende vil vi betegne denne mengden med uttrykket "Ekst;w(x)". Tenker man seg nå at

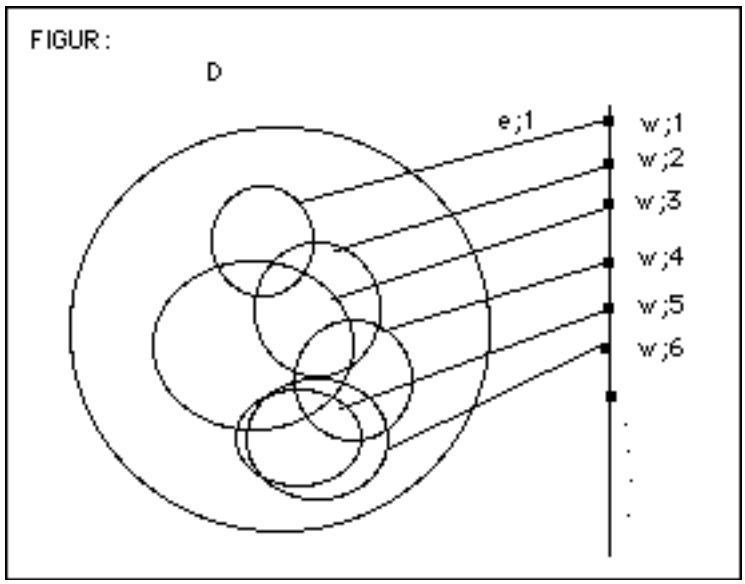
© Morten Rognes 2002 v1.00 -

man så og si "lar blikket løpe" fra en mulig verden til en annen virker det naturlig å tro at ekstensjonen til egenskapen x endres. Dette vil i det minste gjelde for noen egenskaper. F. eks. virker det plausibelt å påstå at det ikke nødvendigvis er slik at alle de individer som har egenskapen å være et rødt materielt objekt i den faktisk foreliggende verden, den aktuelle verden, behøver å ha denne egenskap i enhver mulig annen verden. Ekstensjonen til denne egenskapen kan altså endres når man går fra en mulig verden til den neste. Fra disse overveielsene fremgår det at det til enhver egenskap x av grad 1 rimeligvis finnes en funksjon som til enhver mulig verden w tilordner denne mulige verden ekstensjonen til x i verdenen w. La oss kalle den ekstensjonsfunksjonen som svarer til egenskapen x for q;1(x). Man ser da at

q;1(x)=Mg(<w,Ekst;w(x)>: wêI)

Det skulle være klart, om vi betegner klassen av alle mulige individer med D, og husker at Ekst;w(x) Inkl D om x er en unær egenskap og w er en mulig verden, at q;1(x) er en funksjon i klassen Exp(Pt(D),I).

Ekstensjonsfunksjonen til en unær egenskap e;1 kan anskueliggjøres ved en figur av den følgende type:



Figuren er av en helt uformell natur. De mulige verdenene, dvs. elementene i mengden I, er representert ved punktene på linjen til høyre i figuren. Disse punktene er merket "w;1","w;2", "w;3", ... etc. og tenkes å representere en opp-telling eller enummerering av I. Sirkelen til venstre på figuren, som er merket D, representerer mengden av alle mulige individer. Den sirkelen innenfor D som har en pil fra punktet w;1 rettet mot seg representerer ekstensjonen til egenskapen e;1 i verdenen w;1. Tilsvarende med de andre sirklene innenfor D. Disse er ment å skulle representere ekstensjonen til egenskapen e;1 i henholdsvis verdenene w;2, w;3, w;4 og w;5. Ekstensjons-funksjonen til e;1 er følgelig anskueliggjort ved pilene som peker fra punktene på linjen til høyre mot de diverse sirklene innenfor D.

Som nevnt er en slik figur helt uformell og kan, hvis man betrakter den ukritisk, lede til visse misforståelser. F. eks. antyder det forhold at de mulige verdenene er representert ved punkter på den vertikale linjen til høyre at det bare eksisterer tellbart uendelig mange logisk mulige verdener. Men dette behøver ikke nødvendigvis å være tilfelle, og det er intet i de teorier som vil bli fremlagt her som impliserer dette. Kardinaltallet til mengden av mulige verdener kan være meget "stort" og langt større en kardinaltallet til den rekke av punkter som er antydet på figuren. Videre kunne man kanskje si at figuren antyder at mengden av mulige

individer er likemektig med, eller kan en-entydig avbildes på, mengden av alle de punkter som ligger innenfor sirkelen. Men en slik påstand følger ikke fra noen av grunnsetningene i noen av våre teorier, og om figuren medfører at noen trekker denne slutning er den på dette punkt misvisende.

På den annen side er det utvilsomt riktig at slike figurer kan ha en betraktelig heuristisk verdi. Ved å betrakte en slik figur kan man av og til bli oppmerksom på en rekke satser om de entiteter som det er meningen at figuren skal anskueliggjøre. Dette innebærer at slike figurer kan hjelpe en til å se sammenhenger som det ikke ellers ville ha vært så lett å se, og at de også kan være til hjelp når det gjelder å fastholde slike sammenhenger som premisser i forskjellige resonnementer. På den annen side kan figurer av denne art ikke fungere som bevis og man må selvfølgelig ved mer rigorøse metoder kritisk granske de oppfatninger som figurene gir opphav til.[5]

§3 Teorien E;1. En gjennomgåelse av de viktigste grunnsetningene.

Så langt har språket L;e[Δ] blitt definert og avgrenset. I tillegg har det blitt fremsatt endel uformelle kommentarer til de primitive, ikke-logiske, predika-tene som inngår i dette språket.

Det vi nå vil gjøre er å formulere endel generelle setninger i L;e[Δ] som sier noe om egenskaper, og som dessuten synes å være av en grunnleggende karakter. Det dreier seg om setningene A1 – A12 nedenfor. De enkelte setninger vil bli kommentert og diskutert ettersom de formuleres. Vi vil dernest betrakte den første-ordens teorien som fremkommer som resultat når vi utvider ZFCu(L;e[Δ]) med disse setningene, samt setningene U1 – U4 som ble angitt i Rognes [2].

Den første setningen som betraktes angår relasjonen At, dvs. relasjonen "x er en egenskap av grad y" :

| A1 At;n(x) –> nê(N –{ø}) |

Her betegner "N" klassen av de naturlige tall i von Neumanns forstand, dvs. den minste mengden som inneholder nullmengden og som er lukket under etterfølger-operasjonen f definert ved f(x)=xU{x}. Dette innebærer at N er *w*. Som man ser sier setningen A1 at dersom x er en egenskap av grad n så er n alltid et naturlig tall som er større enn null. To ting kan nevnes i forbindelse med dette aksiomet: Det første er at det prinsipielt ikke er noe i veien for å operere med egenskaper av grad 0. Det vil da, av grunner som det vil bli gjort rede for senere, være naturlig å identifisere disse egenskapene av grad 0 med presise deskriptive utsagn. Men siden utsagn har en litt annen struktur enn egenskaper av grad n≥1 synes det naturlig å holde dem adskilt fra egenskaper og ikke betrakte dem som en slags degenererte egenskaper.

Det andre forhold er at det i prinsippet ikke er noe i veien for å betrakte egenskaper av grad x der x er et vilkårlig ordinaltall og ikke bare et endelig ordinaltall. Ekstensjonen til en slik egenskap i en mulig verden w kunne da oppfattes som mengden av alle de sekvenser av

[5] I språket L;e[Δ] kan vi ikke uten videre formalisere setninger om egenskaper som sier noe mer bestemt om deres ontologiske status. En setning som f. eks. "Universet av egenskaper er et menneskelaget produkt som etter at det har blitt konstruert har en stor grad av autonomi." kan neppe formaliseres innenfor rammen av L;e[Δ]. Heller ikke mer Platonsk pregede setninger som "De enkelte egenskaper, såvel som mengden av alle egenskaper, er evige og uforgjengelige entiteter som ikke er i forandring." Teoriene E;1 – E;3 (og forøvrig de andre teoriene vi beskriver og som er varianter av de nevnte) kan sies å være nøytrale i relasjon til setninger av denne type og vi vil i dette arbeid ikke drøfte eller ta stilling til påstander av denne art.

lengde x som har egenskapen i denne verden. Hovedgrunnen til at dette ikke gjøres her er at en endring av A1 i denne retning vil gjøre teorien mer komplisert og uoversiktlig. Dessuten synes slike egenskaper å kunne identifiseres med en spesiell type egenskaper av grad 1.

Den neste setningen som betraktes er denne:

A2 H(x,y,w) –> (MV(w) & (En)(nê(N-{ø}) &At;n(y)))

Denne setningen uttrykker at dersom x er et objekt som har egenskapen y i verdenen w så er w en logisk mulig verden og y en egenskap av en eller annen grad. Dette er naturlig nok en ren selvfølgelighet og utstrakte kommentarer i denne forbindelse skulle være overflødige.

A3 H(x,y,w) & At;n(y) –> xêD^n

I forbindelse med denne setningen bemerker vi først at D er mengden av mulige individer og at denne er definert ved D = Mg(x: MI(x)). Videre bemerker vi at D^n betegner klassen av alle de funksjoner hvor domenet er n og hvor verdiområdet er inkludert i D. Vi identifiserer altså et n-tuplene av mulige individer med de diverse funksjonene som er med i D^n. I lys av disse bemerkningene uttrykker A3 at dersom x har egenskapen y i verdenen w og y er en egenskap av grad n så er alltid x et n-tuple av mulige individer. Det synes ikke å være noen grunn til å anta at denne setningen skulle være særlig kontroversiell. Noen utførlig diskusjon av setningen vil derfor ikke bli gitt her. Fra denne setningen følger at ekstensjonen til en egenskap av grad n i en verden w er en mengde av n-tupler av mulige individer. Men dette synes bare å gjenspeile det vi umiddelbart tenker oss lagt inn i begrepet egenskap av grad n.

Derimot er de følgende tre setninger langt mindre innlysende, men kanskje ikke uten en viss plausibilitet:

A4 nê(N-{ø}) –> (Ey)(M(y) & y= Mg(x: At;n(x)))
A5 (Ey)(M(y) & y= Mg(x: MI(x)))
A6 Ca(D) ≥ Aleph;0

Den første av disse tre formlene utrykker at hvis n er et naturlig tall ≥1 så finnes mengden av alle egenskaper av grad n. De to siste setningene uttrykker at klassen av alle logisk mulige individer er en mengde og at denne mengden har et kardinaltall som er minst like stort som kardinaltallet til mengden av de naturlige tall. Disse setningene vil bli mer inngående diskutert senere. Her vil vi bare antyde noen innvendinger.

Hvis man tenker seg at klassen av mulige individer skal inneholde alt som kan sies å ha en eller annen egenskap er det urimelig å anta at denne klassen er en mengde som eksisterer. For i så tilfelle ville mengden av mulige individer selv være en entitet som har visse egenskaper, og derfor et mulig individ. Mao. ville da mengden av mulige individer være et element i seg selv. Dette strider imidlertid mot de mengdeteoretiske forutsetningene som vi har fastlagt. Fundierungsaksiomet, som er en av disse forutsetningene, utelukker jo som bekjent nettopp dette. Hvis man derfor aksepterer A5 og fastholder de mengdeteoretiske aksiomer som det har blitt gjort rede for er man tvunget til å oppfatte D som en slags "transendent" entitet som i lys av A3 ikke kan ha noen egenskaper av grad n≥1 i noen mulig verden. Slike entiteter, som ikke kan være i besittelse av noen egenskaper i noen mulige verdener, mao. som er nødvendig egenskapsløse, virker eiendommelige, og spesielt eiendommelige i dette tilfellet fordi man tilsynelatende kan fremsette en rekke utsagn om D og derfor tilskrive denne mengden en rekke egenskaper. Dermed er noen betenkeligheter ved

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

A5 skissert. Merk imidlertid at dette ikke viser at man fra A5 formellt sett kan utlede noen selvmotsigelser selvom man forutsetter de andre aksiomene som er nevnt og de som etterhvert vil bli formulert.

Hvis man aksepterer A5 synes det også rimelig å akseptere A6. Alle tallene i tallrekken burde vel i det minste kunne anses som mulige individer og i så fall må D være minst tellbart uendelig.

Når det gjelder A4 kan man ha lignende betenkeligheter som ved A5. Vi sikter til det forhold at det er noe kunstig ved å betrakte mengden av alle egenskaper som en avsluttet totalitet. La oss imidlertid foreløpig akseptere A1 – A6 mer eller mindre tentativt og studere en del andre setninger i L;e[Δ] som virker interessante.

Vi ser da først på:

A7 At;n(y;1) & At;n(y;2) & nê(N-{ø}) &
(Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y,w)) = Mg(x: H(x,y,w))) –> y;1=y;2

Det denne setningen uttrykker er at hvis y;1 og y;2 er egenskaper av grad n≥1, og man for enhver mulig verden w har at mengden av alle de entitetene som har egenskapen y;1 i verdenen w er identisk med mengden av alle de entiteter som har egenskapen y;2 i verdenen w, så er de to egenskapene identiske.

I forbindelse med A7 bemerkes at "I" betegner klassen av alle mulige verdener. Dette innebærer at I = Mg(x: MV(x)). Videre betegnes ekstensjonen til egenskapen y i verdenen w, som er mengden av alle de entiteter som har egenskapen y i verdenen w, med "Ekst;w(y)". Dette uttrykket kan fra en formell synsvinkel defineres slik:

(3) Ekst;w(y) = Mg(x: H(x,y,w))

I lys av disse to konvensjonene ser man at A7 uttrykker at to egenskaper av samme grad er identiske dersom og bare dersom de har nøyaktig den samme ekstensjon i enhver mulig verden.

Umiddelbart virker denne setningen svært plausibel. Det er vanskelig å se noen god grunn til å skille fra hverandre to egenskaper som ekstensjonelt sett faller sammen i alle mulige verdener. Det virker også naturlig å ta i betraktning A7 om man aksepterer det analoge identitetsaksiom for utsagn som ble formulert i Rognes [2]. Imidlertid vil vi bemerke at det teoretisk sett er mulig å arbeide med et egenskapsbegrep der A7 ikke holder. Anta at man fjerner A7. Man kan da definere en ekvivalensrelasjon mellom egenskaper ved å stipulere at to egenskaper y;1 og y;2 er ekvivalente om deres ekstensjon faller sammen i enhver mulig verden. En egenskap i den betydning som tilsiktes her kan så identifiseres med en ekvivalensklasse av egenskaper i denne svakere betydningen.

Så langt har det ikke blitt nevnt noen operasjoner på egenskaper som produserer mulige nye egenskaper om de anvendes på elementene i en på forhånd gitt mengde av egenskaper. To slike operasjoner vil nå bli betraktet, nemlig negasjon og uendelig konjunksjon. I forbindelse med negasjon betraktes det følgende aksiom:

A8 At;n(x) –> (Ey)(At;n(y) & (Az)(Aw)(zêD^n &wêI –>
(H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

Som man ser uttrykker denne setningen at hvis x er en egenskap av grad n finnes det alltid en egenskap y av grad n der ekstensjonen til y i en verden w er komplementet til ekstensjonen til x i verdenen w med hensyn til D^n. Dette aksiom virker intuitivt rimelig: Finnes det noe slikt som egenskapen å være en rød materiell gjenstand virker det også rimelig å tro at det

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

skulle eksistere noe slikt som egenskapen å være et objekt x som er slik at x ikke er en rød materiell gjenstand.

Når det gjelder konjunksjonsoperasjonen betraktes den følgende setning:

A9 (M(a) & (Ax)(xêa –> At;n(x)) & nê(N-{ø}) –>
(Ey)(At;n(y) & (Aw)(Az)((wêI & zêD^n)–>
(H(z,y,w) <–> (Ax)(xêa –> H(z,x,w)))))

Det A9 uttrykker er dette: Anta a er en mengde som bare inneholder n-ære egenskaper. (n≥1). Da finnes det en egenskap y hvor det er slik at for alle mulige verdener w så er ekstensjonen til y i verdenen w snittet av ekstensjonene i w til de diverse egenskapene i mengden a. Merk i denne forbindelse at det ikke legges noen restriksjoner på antallet elementer i a. a kan være en mengde med et hvilket som helst kardinaltall.[6]

Aksiomene A8 og A9 kalles for henholdsvis negasjonsaksiomet og konjunksjonsaksiomet for egenskaper. Disse aksiomene sikrer eksistensen av visse egenskaper gitt at man har for seg noen på forhånd. Men i seg selv kan ikke disse aksiomene garantere at klassen av egenskaper er ikke-tom. Dette garanteres heller ikke uten videre av identitetsaksiomet A7 eller av noen av de setningene som tidligere har blitt betraktet. De setningene som så langt har blitt nevnt i denne paragrafen er alle enkeltvis og samlet forenelige med den setning at det ikke finnes egenskaper. Det er derfor naturlig å formulere et aksiom som impliserer eksistensen av egenskaper.

Nå virker det nærliggende å tro at dersom X er en mengde med n-tupler av mulige individer, ie om M(X)&X Inkl D^n og w er en mulig verden så bør det finnes en n-ær egenskap y der ekstensjonen til y i verdenen w er identisk med mengden X. Riktignok har vi ikke postulert nøyaktig hvor mange elementer det er i mengden D, men om vi antar at denne mengden er minst tellbart uendelig vil den setningen som nettopp har blitt nevnt implisere eksistensen av minst et kontinuum av egenskaper. Den følgende setning , A10, kalles derfor for eksistensaksiomet for egenskaper:

A10 (M(X) & X Inkl D^n & nê(N-{ø}) & wêI) –>
(Ey)(At;n(y) & Ekst;w(y)=X)

Anta nå at w;1 og w;2 er to distinkte mulige verdener og at X Inkl D^n der X er en mengde. Er det da urimelig å hevde at det finnes to egenskaper, la oss kalle dem y og z slik at ekstensjonene til y og z er identiske med X i verdenen w;1, mens de er disjunkte i verden w;2 ? Det kan synes som om denne påstanden er forholdsvis uskyldig. Det synes rimelig å anta at universet av egenskaper skulle være såpass rikholdig at det skulle være mulig å finne et slikt attributtpar for alle par av mulige verdener <w;1,w;2> og alle mengder X der X Inkl D^n. Hvis denne antagelsen er riktig kan man si at to mulige verdener alltid kan skilles fra hverandre ved hjelp av to egenskaper. Av denne grunn kalles den følgende setning for separabilitetsaksiomet:

A11 w;1,w;2êI & w;1≠w;2 & M(X) & X Inkl D^n & nê(N-{ø}) –>
(Ey)(Ez)(At;n(y) & At;n(z) &
Ekst;(w;1)(y) = Ekst;(w;1)(z)= X &
Ekst;(w;2)(y) Ω Ekst;(w;2)(z)= ø)

[6] I A9 er det intet som forhindrer at a=ø. I så tilfelle blir det attributtet som påstås å ekistere det attributtet hvis ekstensjon i hver mulig verden er D^n (n≥1).

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Det bør bemerkes at denne setningen er sterkere enn A10. Dette innebærer at A11 impliserer A10. Derimot kan man vise at A10 hverken isolert eller sammen med A1 – A9 impliserer A11. Mao. er A11 genuint sterkere enn A10. Grunnen til at A1 – A10 ikke impliserer A11 er at alle disse aksiomene er oppfylt om vi antar at universet av egenskaper A;n (n≥1) bare inneholder såkalte rigide egenskaper, dvs. egenskaper som har den samme ekstensjon i alle mulige verdener. Derimot ser man helt tydelig at A11 ikke er oppfylt om alle egenskaper er i rigide i denne forstand.

I Rognes [2] ble teorien T;1, en teori om presise deskriptive utsagn, beskrevet. De viktigste aksiomene i denne teorien, bortsett fra de rent logiske og mengde-teoretiske aksiomene, var de følgende formler, som også er formler i L;e[Δ]. Siden disse formlene ble utførlig kommentert i §2 i det nevnte arbeid skal de ikke kommenteres nærmere her.

U1 (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx <–> MV(y)) & Ca(x)≥ Aleph;0)
U2 (Ax)(Ay)(Ut(x) &Ut(y) –> (x=y <–>
(Aw)(MV(w)–> (True(w,x) <–> True(w,y)))))
U3 (Aw)(Ax)(True(w,x) –> (MV(w) & Ut(x)))
U4 (Ax)(M(x) & (Ay)(yêx –> MV(y)) –>
(Ez)(Ut(z) & (Aw)(MV(w) –> (True(w,z) <–> wêx))))

Den første-ordens teorien som fremkommer som resultat når teorien ZFCu(L;e[Δ]) utvides med lukningene av formlene A1 – A11 samt formlene U1 – U4 som nye ikke-logiske aksiomer kalles her for E;1. Dette er den første av de tre teoriene som vil bli drøftet mer utførlig i dette arbeidet. Den skulle hermed være presist definert og avgrenset.

Imidlertid vil også en annen teori bli betraktet. Den følgende formel i L;e[Δ] kalles for A12:

A12 Func(f) & Dom(f)=I & Rgn(f) Inkl D^n & nê(N-{ø}) –>
(Ez)(At;n(z) & (Aw)(wêI –> Ekt;w(z) = f(w)))

A12 uttrykker at dersom f er en funksjon som til hver mulig verden tilordner en mengde med n-tupler av mulige individer finnes det et n-ært attributt hvis ekstensjon i enhver verden w er f(w). Senere vil det bli bevist at A12 er ekvivalent med konsjunksjonen av formlene A8 – A11. Dette innebærer at man kan forenkle teorien E;1 noe. Imidlertid kan det hevdes at A12 ikke har et så innlysende preg som de enkelte formlene A1 – A12. Dette er grunnen til at A12 presenteres til slutt.[7]

Den første-ordens teorien som fremkommer som resultat når ZFCu(L;e[Δ]) utvides med lukningene av formlene A1 – A7, lukningen av A12 samt formlene U1 – U4 som ikke-logiske aksiomer betegnes i dette arbeid med "E;2". Senere vil det bli bevist at teoriene E;1 og E;2 er deduktivt ekvivalente.

På dette punkt kan det være passende å nevne noen mulige utvidelser av E;1 og E;2. Hvis man tenker seg at det finnes et uendelig mangfold av mulige verdener virker det rimelig å tro

[7] Vi har ikke vist at aksiomene A1 – A11, eventuelt A1 – A7 samt A12, er uavhengige av hverandre. Heller ikke hevdes det at aksiomatiseringen er fullstendig gjennomarbeidet på dette punkt. Det er mulig at noen av aksiomene om er nevnt er overflødige gitt de andre. Dette problem har altså ikke blitt studert detaljert. Slik de er oppført synes A1 – A11 (eventuelt A1–A7, A12) å utgjøre en forholdsvis naturlig og avrundet aksiom-mengde. Det skulle også være klart at teorien E;1 ikke kan være fullstendig i den forstand at enten P eller ¬P er et teorem i E;1 om P er en velformet formel i språket til E;1. Dette fremgår av det forhold at ZFCu(L;e) er ufullstendig i lys av Gødels ufullstendighetsteorem og det at E;1 er en utvidelse av ZFCu(L;e).

at det blandt disse verdenene skulle finnes en spesiell verden som er den som faktisk foreligger, mao. den aktuelle verden. I L;e[Δ] kan man tilsynelatende ikke tale om denne spesielle verdenen. Hvis man derfor ønsker å gjøre det er det naturlig å innføre nye uttrykksmidler som gjør dette mulig. Man kan i så fall utvide Δ med et nytt predikat "x er den aktuelle verden". La oss forkorte dette med "Aktuell(x)". Man får da en litt rikere mengde med predikater Δ'. I det mer omfattende språk L;e[Δ'] kan man så formulere diverse setninger om mulige verdener. Det ville f.eks. være rimelig å ta i betraktning det følgende aksiom:

Akt 1 (E!x)(Aktuell(x)) & (Ay)(Aktuell(y) –> MV(y))

Denne setningen uttrykker at det finnes nøyaktig en og bare en entitet om er den aktuelle verden og at denne gjenstand faktisk hører med til mengden av de alle mulige verdener. Innføres dette predikat kan man også definere hva som menes med at et utsagn er sant, eventuelt usant, og ikke bare sannhet (usannhet) relativt til en mulig verden: Et utagn y er sant hvis og bare hvis det er sant i den aktuelle verden ie. hvis og bare hvis True(y, (ix)Aktuell(x)).

En annen distinksjon som ofte gjøres i forbindelse med mulige individer og mulige verdener er at man skiller mellom de individer som eksisterer i en gitt mulig verden w og de som ikke gjør det. Denne distinksjonen synes heller ikke å kunne uttrykkes i L;e[Δ]. Men utvides L;e[Δ] med predikatet "x er et mulig individ som eksisterer i verdenen w", la oss bruke "Eks(x,w)" som forkortelse, kan man i det rikere språk formulere en rekke nye setninger som inneholder dette predikat, f. eks. :

Eks 1 Eks(x,w) –> (xêD & wêI)
Eks 2 (Aw)(MV(w) –>(Ex)(Eks(x,w)))

Disse setningene sier henholdsvis at hvis x er et individ som eksisterer i verdenen w så er x et mulig individ og w en mulig verden, og at dersom w er en eller annen mulig verden så finnes det alltid minst et mulig individ som eksisterer i denne verden. Det ville fra en formell synsvinkel naturligvis ikke være noe i veien for at man utvidet språket til E;1 og E;2 med de predikatene som har blitt nevnt og så la til Akt 1, Eks 1 og Eks 2 (eventuelt andre setninger i tillegg) som nye ikke-logiske aksiomer.

§4 Noen terminologiske bemerkninger.

I språket L;e[Δ] var de følgende predikater primitive: "x er en egenskap av grad y" og "x er et objekt som har egenskapen y i verdenen w". Når det gjelder disse konstruksjonene kan det være på sin plass å gi noen rent terminologiske opplysninger angående språkbruken i dette arbeid. Uttrykket "attributt" brukes her per definisjon synonymt med uttrykket "egenskap". Dette innebærer at det i denne avhandlingen ikke skjelnes mellom to distinkte mengder med gjen-stander, egenskaper på den ene side og attributter på den annen side. At uttrykket "attributt" her brukes synonymt med uttrykket "egenskap" innebærer også at uttrykket "n-ært attributt" betyr det samme som "n-ær egenskap" og at uttrykket "x har attributtet y i verdenen w" har nøyaktig samme betydning som uttrykket "x har egenskapen y i verdenen w". At vi veksler mellom å bruke uttrykkene "attributt" og "egenskap" har altså ingen dypere teoretisk betydning, men skyldes utelukkende et ønske om å kunne variere ordbruken av rent stilistiske grunner. Det er å håpe at leseren ikke forvirres av dette, og det skulle heretter ikke være noen grunn til det. Det bør også bemerkes at vi, igjen for å kunne

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

variere ordbruken, ofte benytter uttrykksmåtene " x er i besittelse av egenskapen y i verdenen w", "x besitter egenskapen y i verdenen w", "egenskapen y kan tilskrives x i verdenen w" istedet for uttrykket "x har egenskapen y i verdenen w".

En annen terminologisk bemerkning gjelder konstruksjonen "x er et mulig individ". Denne konstruksjonen brukes her slik at om man påstår at x er et mulig individ så innebærer dette ikke at x er en person, et menneske el. Uttrykket "individ" i konstruksjonen "x er et mulig individ" har samme betydning som uttrykkene "objekt", "entitet", "gjenstand" eller "ting". De sistnevnte brukes synonymt og på en slik måte at det er hensikten at de skal tillegges et videst mulig omfang. Ordet "objekt" omfatter derfor langt mer enn det uttrykkene "materielt objekt" eller "fysisk objekt" omfatter.

§5 Forholdet mellom egenskaper og begreper.

I det følgende vil vi ikke anta at det er noe skille mellom egenskaper og begreper. Det vil heller ikke bli gjort noe forsøk på å innføre et slikt skille. Terminologien vil også være tilpasset dette forhold i det man overalt kan erstatte uttrykket "egenskap" med uttrykket "begrep". Imidlertid er en slik terminologisk konvensjon ikke av en så opplagt karakter at den kan forbigås uten noen kommentarer. En nærmere begrunnelse synes derfor påkrevet for den antagelse at begreper er det samme som egenskaper. Begrunnelsen for identifikasjonen av begreper og egenskaper kan oppsummeres i de følgende tre punkter:

(i) Vanligvis oppfattes et begrep som en abstrakt størrelse som uttrykkes av et meningsfullt monadisk predikat. I motsetning til dette er det ikke vanlig å si at en meningsfull monadisk predikatkonstruksjon uttrykker en egenskap. I det minste foreligger en tendens i retning av å anse en slik språkbruk for noe uvanlig. Det synes vanligere å si at et predikat betegner en egenskap. Disse og lignende forhold kan lede en til å tro at begreper og egenskaper er gjenstander med forskjellige egenskaper og derfor vesensforskjellige entiteter. På den annen side synes det ikke upassende å inndele begreper i klasser etter hvilken grad de har på samme måte som egenskaper kan sies å være av forskjellige grader. Et monadisk predikat uttrykker et begrep av grad 1, et binært predikat uttrykker et begrep av grad 2, en n-ær predikatkonstruksjon et n-ært begrep, osv. Dette er et likhetstrekk mellom egenskaper og begreper. Når det gjelder gjenstander er det vanlig å si at en gjenstand har en egenskap, man pleier vanligvis ikke å si at en gjenstand faller inn under en egenskap. Det motsatte forhold gjelder ved begreper. En og samme gjenstand kan falle inn under et eller flere begreper, men det synes merkelig å si at en gjenstand har et begrep. Hva disse overveielsene leder til er det følgende: Det synes som om man har med to distinkte par av konstruksjoner å gjøre som i følge vanlig språkbruk ikke pleier å bli brukt om hverandre. På den ene side har man konstruksjonsparet (1) " x er en egenskap av grad y" og (2) "x har egenskapen y i verdenen w". På den annen side har man paret av konstruksjoner (3) "x er et begrep av grad y" og (4) " x er en gjenstand som faller inn under begrepet y i verdenen w". Disse to par av predikater synes å svare til hverandre.

(ii) La oss nå tenke oss at vi i L;e[Δ] erstatter de to førstnevnte konstruksjoner med de to sistnevnte og kaller det språket som resulterer for L'. Vi går da over fra et språk hvor det tales om egenskaper over til et fullstendig strukturlikt språk hvor det tales om begreper. Anta videre at man skriver ut formlene A1 – A11 i L;e[Δ] i primitiv notasjon og at man overalt i de resulterende formler erstatter uttrykket "At;n(x)" med "x er et begrep av grad y" og "H(x,y,w)" med "x er en gjenstand som faller inn under begrepet y i verdenen w". man får da som resultat visse formler A1' – A11' som er formler i språket L'. Disse formlene i L' synes å

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

uttrykke intuitivt rimelige påstander om begreper i nøyaktig like stor grad som A1 – A11 i L;e[Δ] uttrykker rimelige generelle prinsipper om egenskaper. Men dette innebærer at det er en fullstendig analogi mellom de setninger som gjelder om egenskaper og de setninger som gjelder om begreper. Mao. er det en isomorfi mellom disse to kategorier av entiteter. Det synes da noe poengløst å skille disse to klassene fra hverandre. Det kan virke like berettiget å si at det dreier seg om den samme klasse av entiteter.

(iii) Et annet forhold som også kan bidra til å underbygge denne påstanden er at det virker svært rimelig å tro at hvis x er en egenskap så finnes det alltid et korresponderende begrep y som er slik at for enhver verden w vil nøyaktig de ting som har egenskapen x i verdenen w være de ting som faller inn under begrepet y og omvendt. Dette kan også uttrykkes på en litt annen måte. La oss med ekstensjonen til et begrep i en verden w forstå klassen av alle de gjenstander som faller inn under begrepet i denne verdenen w. Da er påstanden den at man til enhver egenskap x kan finne et begrep y som har sammenfallende ekstensjon med x i enhver mulig verden. Den omvendte sats virker også rimelig: Er y et vilkårlig begrep synes det rimelig å tro at det skulle finnes en egenskap x med samme ekstensjon som y i alle logisk mulige verdener. Holder imidlertid disse to setningene kan klassen av egenskaper avbildes en-entydig på klassen av begreper. Som nevnt ovenfor kan dette tas som belegg for det hensiktsløse i å dra et skille mellom begreper og egenskaper. På dette punkt kunne man derfor være fristet til å benytte Ockhams barberkniv og ikke innføre flere entiteter enn strengt nødvendig. I overenstemmelse med dette vil vi derfor i det følgende bruke uttrykket "egenskap" synonymt med uttrykket "begrep".

§6 Noen bemerkninger angående aksiomatiseringen av E;1

Anta at man i formlene A1 – A11 erstatter "N-{ø}" overalt med "N". Dette innebærer at man tillater egenskaper av grad 0. Anta videre at man per definisjon setter D;0 = {D} slik at D;0 inneholder nøyaktig et element som ikke er med i D. Anta ytterligere at man fjerner "Ut(x)" og "True(w,x)" som primitive predikater i språket til teorien E;1 og istedet innfører dem ved de følgende definisjoner:

D1 Ut(x) <–> At;0(x)
D2 True(w,x) <–> (H(D,x,w) & At;0(x) & wêI)

Alt dette innebærer at man oppfatter utsagn som egenskaper av grad 0 og at mengden av alle mulige individer D nå representerer sannhetsverdien sannhet. Anta tilslutt at man fjerner aksiomene U2 – U4 fra aksiomene i E;1. Man får på denne måten en ny teori som er svært nært relatert til E;1. La oss kalle den E;1'. I denne teorien kan man faktisk vise at de utsagnsteoretiske aksiomene U2 – U4 kan utledes som teoremer.

Det er to ting som det kan være av interesse å peke på i denne forbindelse: For det første kan man oppfatte E;1 som en generalisering av den teorien om presise deskriptive utsagn som tidligere ble fremsatt i Rognes [2], nemlig T;1"" som er ekvivalent med T;1. For det andre er det en formell analogi mellom teorien om utsagn og E;1 slik at utsagn kan oppfattes som en spesiell type degenererte attributter. I denne forbindelse kan man betrakte følgende: Anta at man setter n=0 i A11 og antar at D;0 = {D}. Da har man M({D}) & {D} Inkl D;0. Dette innebærer at man har:

(1) w;1,w;2êI & w;1≠w;2 –>
(Ez)(Ey)(At;0(y) & At;0(z) & Ekst;(w;1)(y)={D}=Ekst;(w;1)(z) &
Ekst;(w;2)(y)ΩEkst;(w;2)(z) = ø)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Når har man per definisjon at Ekst;w(y) = Mg(x: H(x,y,w)). Fra dette, D1 ovenfor og (1) følger nå:

(2) w;1,w;2êI & w;1≠w;2 –> (Ez)(Ey)(Ut(z) &Ut(y) &
True(w;1,z) & True(w;1,y) & (¬True(w;2,z) v ¬True(w;2,y)))

Denne formelen er ekvivalent med:

(3) w;1,w;2êI & w;1≠w;2 –> (Ez)(Ut(z) &True(w;1,z) & ¬True(w;2,z))

Denne formelen er i sin tur ekvivalent med den formelen vi tidligere har kalt separabilitetsaksiomet for utsagn.

Sammenfattende kan man bemerke følgende: Det er en viss analogi mellom aksiomene A1 – A11 og våre tidligere aksiomer om utsagn. A7 svarer til identitetsaksiomet for utsagn, A8 – A10 svarer henholdsvis til de aksiomer som i Rognes [2] ble kalt for negasjonsaksiomet for utsagn, konjunksjonsaksiomet for utsagn og eksistensaksiomet for utsagn. A11 svarer så til separabilitetsaksiomet for utsagn slik det er vist ovenfor. Endelig kan det nevnes at A12 kan oppfattes som en generalisert versjon av U4, dvs. det aksiom som i Rognes [2] ble kalt for fullstendighetsaksiomet for utsagn.

Det er en imidlertid en annen mulighet i forbindelse med E;1 og aksiom-ene U1 – U4 som er av interesse. Man kan sløyfe de primitive predikatene "Ut(x)" og "True(w,x)" fra språket til E;1 og sammen med dem også aksiomene U2 – U4. Man får i så fall en ny teori, E;1". Ovenfor ble utsagn identifisert med egenskaper av grad 0. Den muligheten som nå kan betraktes er at man snarere identifiserer utsagn med visse spesielle monadiske egenskaper, nemlig dem hvor ekstensjonen i hver mulig verden enten er nullmengden eller mengden av alle logisk mulige individer, D. Dette innebærer at man kan definere "Ut(x)" og "True(w,x)" på den følgende måte, nemlig ved:

D3 Ut(x) <–> (At;1(x) & (Aw)(wêI –> (Ekst;w(x)=D v Ekst;w(x)=ø)))
D4 True(w,x) <–> (Ut(x) & wêI & Ekst;w(x)=D)

Suppleres E;1" med definisjonene D3 og D4 kan man vise at aksiomene U2 – U4 lar seg utlede som teoremer.

Også denne fremgangsmåten har den fordel at man kan greie seg med færre primitive begreper og noe færre aksiomer. På den annen side taper man også noe. Definisjonene ovenfor kan vel knapt sies å være spesielt innlysende i seg selv og det synes nærmest umulig å rettferdiggjøre dem eller motivere dem uten nettopp å trekke inn en teori av typen U1 – U4. Men i så fall er det nokså nærliggende å tro at det er den sistnevnte teori som er den grunnleggende, ikke den utsagnsteorien som er gitt ved definisjonene D3 og D4.[8]

§7 Boolske operasjoner over klassen av egenskaper. Noen viktige teoremer i teorien E;1

Så langt har teorien E;1 blitt presist definert, grunntrekkene ved den har blitt beskrevet, og enkelte sider ved den har blitt kommentert. Det vi nå vil gjøre er å se på endel viktige begrepsdannelser som kan innføres i forbindelse med denne teorien og i denne sammenheng nevne en rekke satser som kan bidra til at man får et bedre tak i teoriens karakteristiske fysionomi, dens særegne "ansiktstrekk".

---

[8] De alternative aksiomatiseringene E;1' og E;1" av E;1 betraktes her fordi man kan få noe bedre forståelse for hva en teori sier om man kjenner til forskjellige måter å formulere den på. Et forhold forstås kort sagt bedre om man kan se det fra forskjellige synsvinkler. Dessuten er den sats at disse tre teoriene er ekvivalente ikke helt opplagt. Satsen blir bevist i et supplement til dette arbeid, se Rognes [6].

Vi definerer uttrykket "EFunc;n(y)", som leses "Ekstensjonsfunksjonen til den n-ære egenskapen y" ved:

(1) EFunc;n(y) = Mg(<w, Ekst;w(y)>: wêI & At;n(y))

Man skulle forholdsvis lett se fra denne definisjonen at dersom y er et n-ært attributt (n≥1) så er EFunc;n(y) den funksjonen som til enhver mulig verden w tilordner ekstensjonen til egenskapen y i verdenen w. Vi definerer så en funksjon q;n, der det forutsettes at n≥1 på den følgende måte:

(2) q;n = Mg(<y,EFunc;n(y)>: At;n(y))

Fra denne definisjonen fremgår det at q;n er den funksjonen som til enhver n-ær egenskap tilordner egenskapen dens egen ekstensjonsfunksjon. I tilknytning til de to begrepdannelsene som nå har blitt innført nevnes den følgende sats:

Teorem 1 (E;1) (a) At;n(y) & nê(N-{ø}) & wêI –> (Ex)(M(x) & x= Mg(z: H(z,y,w)))

(b) At;n(y) & nê(N-{ø}) & wêI –> (Ex)(M(x) & Ekst;w(y) =x)

Denne nokså trivelle eksistenssetningen er det lett å bevise riktigheten av. Den første delen av setningen, punkt (a), sier at dersom y er en n-ær egenskap for noe nêN-{ø}, og w er en mulig verden, så finnes det en mengde som inneholder nøyaktig de og bare de objekter som har denne egenskap i verdenen w. Punkt (b) i teoremet uttrykker at under disse forutsetninger finnes det også en mengde x som er identisk med ekstensjonen til egenskapen y i verdenen w.

På dette punkt er det passende å gjøre oppmerksom på at det i dette arbeidet ikke vil bli gitt utførlige bevis for de satser som nevnes. Detaljerte bevis for alle de satser som er nevnt er derimot gitt i et supplement til dette arbeidet, Rognes [6]. Det er hovedsakelig tre grunner for denne fremgangsmåten. For det første er det slik at en del av bevisene er av en såpass enkel karakter at leseren selv kan gjennomføre dem. For det andre er en del av bevisene såpass lange at de lett vil kunne komme til å distrahere leseren om de flettes inn i her. Hovedtrekkene i teksten vil ha en tendens å bli borte i en rekke bevisdetaljer, som selvfølgelig er viktige nok, men som egentlig ikke er nødvendige for å forstå det som skrives. For det tredje ville dette arbeidet bli uforholdsmessig langt om man tok med helt detaljerte bevis.

La oss så gå videre. Den følgende setning angir noen viktige egenskaper til ekstensjonsfunksjonen tilordnet en egenskap y:

Teorem 2 (E;1) Er nê(N-{ø}) og har man at At;n(y) gjelder:

(i) Func(EFunc;n(y))

(ii) Dom(EFunc;n(y)) = I

(iii) Rgn(EFunc;n(y)) Inkl Pt(D^n)

(iv) EFunc;n(y) ê Exp(Pt(D^n),I)

Satsen viser at EFunc;n(y) har de egenskaper som det er naturlig å kreve: For det første at det dreier seg om en funksjon, for det andre at domenet til funksjonen er mengden av mulige verdener,I, for det tredje at verdiområdet til funksjonen er inkludert i potensmengden til klassen av alle n-tupler og endelig at det dreier seg om en funksjon i klassen Exp(Pt(D^n),I). I forbindelse med denne satsen kan det være verdt å minne om at D^n betegner klassen av alle funksjoner hvis domene er n og hvor verdiområdet er inkludert i mengden D. Dette gir mening fordi det naturlige tallet n er mengden av alle sine forgjengere når man bruker von Neumanns versjon av de naturlige tall slik det gjøres her. Er x,y to vilkårlige mengder

betegner "x^y" nettopp klassen av funksjoner f der man har
f: x –> y. Det bør også bemerkes at "Exp(x,y)" er en alternativ notasjon for det samme. Fra disse forklaringene fremgår det at det siste punktet i satsen ovenfor følger fra de tre foregående.

I forbindelse med Teorem 2 er det også nærliggende å nevne den følgende sats:

Teorem 3 (E;1) Anta nê(N-{ø}). Da gjelder:
q;n : Mg(y: At;n(y)) -(1-1)–> Exp(Pt(D^n),I)

Dette teoremet er interessant fordi det viser at attributter av grad n kan en-entydig tilordnes funkjoner i mengden Exp(Pt(D^n),I). Man kan spørre om q;n avbilder Mg(y: At;n(y)) på mengden Exp(Pt(D^n),I). Svaret er at dette lar seg bevise i E;1 og at man i beviset for det må benytte alle av aksiomene A8 – A11.

Siden det er nokså tungvint å skrive "Mg(x: At;n(x))" er det beleilig å innføre "A;n" som en forkortelse for dette lengere uttrykket. Vi setter derfor:

(1) A;n= Mg(x: At;n(x))

Egenskaper har en viss analogi med mengder. Det er f.eks. mulig å definere et sett med Boolske operasjoner over mengden av n-ære egenskaper (n≥1) slik at A;n pluss disse operasjonene utgjør det man vanligvis vil kalle for en Boolsk algebra. I det følgende vil det bli bevist hvordan dette gjøres.

Først defineres det n-ære nullattributtet , Ø;n, på den følgende måte:

(2) Ø;n = (ix)(At;n(x) & ¬(Ew)(Ey)(H(y,x,w)))

Man kan så uten særlige vanskeligheter bevise det følgende teorem i E;1:

Teorem 4 (E;1) nê(N-{ø}) –> (Ey)(y=Ø;n)

Bevis: Fra aksiom A5 følger M(D). Fra de mengdeteoretiske aksiomene som er fastlagt følger da M(D^n) om nê(N-{ø}). Videre følger fra definisjonen av I og U1 at I≠ø. Derfor har man selvfølgelig at det finnes noe w der wêI. Siden
D^n Inkl D^n følger ved hjelp av A10 at det må finnes z der: (1) At;n(z). Fra dette og A8 følger eksistensen av y der :
(2) At;n(y) & (Ar)(Aw)(rêD^n &wêI –> (H(r,y,w) <–> ¬H(r,z,w)))
Man har åpenbart at {z,y} er en mengde og at elementene i denne er attributter av grad n. I lys av A9 må man derfor ha at det finnes en egenskap z;2 der:
(3) At;n(z;2) & (Aw)(Ar)(rêD^n & wêI –>
(H(r,z;2,w) <–> (H(r,z,w) & H(r,y,w))))
Anta nå at (4) (Ew)(Er)(H(r,z;2,w)). Da finnes r, w slik at (5) H(r,z;2,w). Fra (5) og A2 følger (6) wêI. Fra (5),(3) og A3 følger: (7) rêD^n. Fra (6), (7) og de to siste konjunktene i (2) og (3) følger så ¬H(r,z;2,w). Dette strider åpenbart mot (5). Det følger at (4) er usann og man må derfor ha at (8) ¬(Ew)(Er)(H(r,z;2,w)). Fra dette og (3) følger i sin tur (Ex)(At;n(x) & ¬(Ew)(Er)(H(r,z;2,w))). Entydigheten følger så ved hjelp av A7. **QED**

Negasjonen av det n-ære attributtet x, i symboler "Neg;(a,n)(x)" defineres ved:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(3) $\text{Neg;(a,n)(x)} = (\text{iy})(\text{At;n(y)} \,\&\, (\text{Ar})(\text{Aw})(\text{r}\hat{\in}\text{D}\hat{}\text{n} \,\&\, \text{w}\hat{\in}\text{I} \rightarrow (\text{H(r,y,w)} \leftrightarrow \neg\text{H(r,z,w)})))$

Noen bemerkningerom notasjonen kan gjøres i forbindelse med denne definisjonen. Uttrykket "Neg;(a,n)(x)" kan synes unødvendig "klumsete". Men vi bruker offisielt denne notasjonen med indeks n for å antyde at operasjonen skal anvendes på n-ære egenskaper og føyer også til "a" for å angi at det dreiere seg om attributter. ("a" står for "attributt") Det kan også være hensiktsmessig å skrive "Neg;(a,n)(x)" for å vise at det dreier seg om en operasjon på egenskaper og at operasjonen er distinkt fra Neg som er en operasjon på utsagn. Man erindrer at Neg er den funksjonen som tilordner negasjonen av et utsagn x til utsagnet x. I sammenhenger hvor det er helt klart at "x", "y", "z"... etc. betegner n-ære egenskaper skal vi imidlertid tillate oss å skrive "-x","-y", "-z" ... etc. i stedet for "Neg;(a,n)(x)","Neg;(a,n)(y)", "Neg;(a,n)(z)", ... osv.

Ved hjelp av A8, negasjonsaksiomet, og A7, identitetsaksiomet for egenskaper, kan man lett vise det følgende teorem:

Teorem 5 (E;1) (a) Har man at $\text{n}\hat{\in}(\text{N}-\{\text{ø}\})$ og At;n(x) gjelder
$(\text{Ey})(\text{y} = \text{Neg;(a,n)(x)})$
(b) Er $\text{n}\hat{\in}(\text{N}-\{\text{ø}\})$ og At;n(x) gjelder:
$\text{Ekst;w(Neg;(a,n)(x))} = \text{D}\hat{}\text{n} - \text{Ekst;w(x)}$

Er x en mengde med n-ære attributter kan man snakke om konjunksjonen av dem, Kon;(a,n)(x). Uttrykket "Kon;(a,n)(x)" defineres på den følgende måte:

(4) $\text{Kon;(a,n)(x)} = (\text{iy})(\text{At;n(y)} \,\&\, (\text{Az})(\text{Aw})(\text{w}\hat{\in}\text{I} \,\&\, \text{z}\hat{\in}\text{D}\hat{}\text{n} \rightarrow (\text{H(z,y,w)} \leftrightarrow (\text{Ar})(\text{r}\hat{\in}\text{x} \rightarrow \text{H(z,r,w)}))))$

De samme bemerkningene om notasjon som ble fremlagt i forbindelse med uttrykket "Neg;(a,n)(x)" kan gjentas her. Er det klart fra sammenhengen at x er en mengde som utelukkende inneholder n-ære attributter vil vi av og til skrive "SNa(x)" i stedet for det mer kompiserte uttrykket "Kon;(a,n)(x)".

På tilsvarende vis kan man innføre disjunksjonen av de n-ære attributtene i mengden x, Dis;(a,n)(x) ved den følgende definisjon:

(5) $\text{Dis;(a,n)(x)} = \text{Neg;(a,n)[Kon;(a,n)(Mg(Neg;(a,n)(y): y}\hat{\in}\text{x))]}$

Her kunne man forøvrig ha gitt en annen, litt lengere definisjon, etter forbilde av (4), nemlig:

(5.1) $\text{Dis;(a,n)(x)} = (\text{iy})(\text{At;n(y)} \,\&\, (\text{Az})(\text{Aw})(\text{w}\hat{\in}\text{I} \,\&\, \text{z}\hat{\in}\text{D}\hat{}\text{n} \rightarrow (\text{H(z,y,w)} \leftrightarrow (\text{Er})(\text{r}\hat{\in}\text{x} \,\&\, \text{H(z,r,w)}))))$

Tilslutt definerer vi disjunksjonen av x og y, og konjunksjonen av x og y, der x og y er n-ære egenskaper ved:

(6) $\text{D;(a,n)(x,y)} = \text{Dis;(a,n)}(\{\text{x,y}\})$
(7) $\text{K;(a,n)(x,y)} = \text{Kon;(a,n)}(\{\text{x,y}\})$[9]

[9] Vi har her hovedsakelig begrenset oss til å betrakte operasjonene Neg;(a,n), Kon;(a,n) og Dis;(a,n) på attributter, og de helt analoge operasjonene N,K og D på utsagn. Imidlertid ville det ha vært mulig også å ha betraktet operasjoner som svarer til materiell implikasjon og materiell ekvivalens i forbindelse med egenskaper. Man kunne ha kalt dem Cd;(a,n) og Ekv;(a,n). En rekke velkjente interdefinerbarhetsrelasjoner består mellom disse to operasjonene og Neg;(a,n), K;(a,n) og D;(a,n). En annen operasjon som det også kunne ha en viss

Det følgende teorem gjelder for operasjonene Kon;(a,n)(x) og Dis;(a,n)(x):

Teorem 6 (E;1) Anta nê(N-{ø}) og M(x) & x Inkl A;n. Da gjelder:
(i) (Ey)(y = Kon;(a,n)(x))
(ii) (Ey)(y = Dis;(a,n)(x))
(iii) (Aw)(wêI –> Ekst;w(Kon;(a,n)(x))= D^nΩ SN/yêx/(Ekst;w(y)))
(iv) (Aw)(wêI –> Ekst;w(Dis;(a,n)(x))= UN/yêx/(Ekst;w(y)))

Ovenfor ble funksjonssymbolet "Kon;(a,n)(x)" som leses "Konjunksjonen av de n-ære attributtende i mengden x" definert. Det er da klart at "Kon;(a,n)" kan oppfattes som en betegnelse på en funksjon, nemlig en funksjon som tilordner enhver mengde med n-ære attributter et bestemt n-ært attributt. Denne funksjonen kan formelt sett defineres på den følgende måte:

(8) Kon;(a,n) = Mg(<x, Kon;(a,n)(x)>: M(x) & x Inkl A;n)

På tilsvarende vis er "Neg;(a,n)(x)" et funksjonssymbol. "Neg;(a,n)" kan derfor oppfattes som et navn på den funksjonen som er definert på følgende vis:

(9) Neg;(a,n) = Mg(<x, Neg;(a,n)(x)>: xêA;n)

Fra definisjonene (8) og (9) fremgår det temmelig umiddelbart at man har
Kon;(a,n) : Pt(A;n) –> A;n og Neg;(a,n) : A;n –> A;n.

Er nê(N-{ø}) kan man definere tilsvarende operasjoner over Exp(Pt(D^n),I). Først defineres en operasjon som svarer til konjunksjonsoperatoren Kon;(a,n) over attributter slik:

(10) K;n(x) = (if)(fêExp(Pt(D^n),I) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(zêf(w) <–> (Ay)(yêx –> zêy(w)))))

Dernest definerer vi operasjonen N;n som svarer til negasjonsoperatoren Neg;(a,n) på den følgende måte:

(11) N;n(x) = (if)(fêExp(Pt(D^n),I) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(zêf(w) <–> ¬(zêx(w)))))

Det er nå nokså lett å vise at A;n, såvel som mengden Exp(Pt(D^n),I) er lukket under de operasjonene som så langt er nevnt. Det følgende "lukningsteorem" holder derfor:

Teorem 7 (E;1) Anta nê(N-{ø}). Da gjelder:
(i) (Ax)(M(x) & x Inkl A;n. –> Kon;(a,n)(x)êA;n)
(ii) (Ax)(xêA;n –> Neg;(a,n)(x) êA;n)

---

interesse å betrakte ville være en generalisert form for Sheffer-operator, som i en viss forstand svarer til Sheffer-streken i setningslogikken. Denne nye operasjonen kunne defineres slik:

(D) Sh;(a,n)(x) = (iy)(At;n(y) & (Aw)(Az)(wêI & zêD^n –>
(H(z,y,w) <–> ¬(Er)(rêx & H(z,r,w)))))

Defineres Sh;(a,n) på denne måten kan man vise at Sh;(a,n)({p}) = Neg;(a,n)(p) og dessuten at Kon;(a,n)(x) = Sh;(a,n)(Mg(Neg;(a,n)(y): yêx)) om x er en ikke-tom mengde. Mao. kan alle de Boolske operasjonene over n-ære egenskaper defineres ved hjelp av denne Sheffer-operasjonen.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(iii) (Ax)(M(x) & x Inkl Exp(Pt(D^n),I) –> K;n(x)êExp(Pt(D^n),I))
(iv) (Ax)(xêExp(Pt(D^n),I) –> N;n(x)êExp(Pt(D^n),I))

Det er på dette punkt nærliggende å sammenligne de to strukturene S;1= <A;n,Neg;(a,n), Kon;(a,n)> og S;2= <Exp(Pt(D^n),I), N;n,K;n> hvor de diverse operasjonene i strukturene er definert slik som forklart ovenfor. Fra Teorem 3 fremgikk det at q;n avbildet A;n en-entydig på Exp(Pt(D^n),I), men ikke nødvendigvis på Exp(Pt(D^n),I). Det man nå kan spørre om er hvorvidt denne avbildningen er strukturbevarende, mao. om q;n er en strukturbevarende avbildning fra S;1 inn i S;2. Intuitivt skulle man forvente dette. Det kan kanskje virke innlysende at det er slik og man kunne til og med hevde at dette må la seg bevise om de definisjonene vi har betraktet skal kunne sies å være adekvate. Faktisk lar dette seg bevise slik følgende teorem viser:

Teorem 8 (E;1) Anta nê(N-{ø}). Da gjelder de følgende påstander om avbildningen q;n:
(i) q;n : A;n –(1-1)–> Exp(Pt(D^n),I)
(ii) (Ax)(xêA;n –> q;n(Neg;(a,n)(x)) = N;n(q;n(x)))
(iii) (Ax)(M(x) & x Inkl A;n –>
q;n(Kon;(a,n)(x)) = K;n(Mg(q;n(y): yêx)))

Fra Teorem 8 ser man umiddelbart at q;n er en strukturbevarende avbildning av S;1 inn i S;2, eller det som kalles en homeomorfi mellom S;1 og S;2. Det spørsmål som nå oppstår er om q;n også er en isomorfi mellom de to strukturene. Dette lar seg faktisk bevise. Først gjør vi oppmerksom på at den følgende sats holder:

Teorem 9 (E;1) Anta wêI & M(x) & x Inkl D^n & nê(N-{ø}). Da gjelder:
(Ea)(aêA;n & Ekst;w(a) = x & (Aw')(w'ê(I-{w}) –> Ekst;w'(a)=ø))

Vi utelater beviset for Teorem 9 her fordi det er temmelig langt. Vi bemerker bare at ved hjelp av Teorem 9 kan man uten særlig vanskeligheter bevise:

Teorem 10 (E;1) Anta zêExp(Pt(D^n),I) & nê(N-{ø}). Da gjelder:
(Ea)(aêA;n & (Aw)(wêI –> Ekst;w(a) = Mg(x: xêD^n & xêz(w))))

Ved hjelp av disse to teoremene og definisjonen av q;n følger:

Teorem 11 (E;1) nê(N-{ø}) –> q;n : A;n –(1-1,på)–> Exp(Pt(D^n),I)

Som tidligere nevnt kalles den følgende formel i L;e[Δ] for A12:

A12 Func(f) & Dom(f)=I & Rgn(f) Inkl D^n & nê(N-{ø}) –>
(Ez)(At;n(z) & (Aw)(wêI –> Ekt;w(z) = f(w)))

Fra Teorem 10 fremgår det derfor umiddelbart at denne formelen må være et teorem i E;1. Dette oppføres formelt som et teorem:

Teorem 12 (E;1) A12

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

La nå E;2 være teorien som er nøyaktig som E;1 bortsett fra at de ikke-logiske aksiomene A8 – A11 er erstattet med A12. Man ser da fra Teorem 12 at alle aksiomene i E;2 er teoremer i E;1. Siden slutningsreglene og de ikke-logiske aksiomene forøvrig er de samme i de to teoriene følger da ved induksjon på teoremene i E;2 at:

Teorem 13 (Metateorem) Th(E;2) Inkl Th(E;1)

Merk at denne setningen, slik som antydet, egentlig er et metateorem om teoriene E;1 og E;2 og ikke uten videre kan regnes som et teorem i E;1 eller E;2. Setningen bevises på basis av prinsipper i meta-språket som stilltiende tas for gitt, men som det ikke har blitt gitt noen systematisk oversikt over. De metaspråkelige uttrykk som inngår i Teorem 13 kan imidlertid bli definert i primitiv rekursiv aritmetikk og bevises på grunnlag av svært elementære prinsipper, som aksepteres av de aller fleste, innenfor den elementære tallteori.

Figuren på neste side er ment som en uformell illustrasjon til universet av egenskaper A;n (nê(N-{ø}). Vi tenker oss en rett sylinder og langs siden av denne en rett linje L. Punktene på denne linjen representerer de enkelte mulige verdenene. Punktene i bunnen av sylinderen representerer de enkelte mulige individer slik at selve bunnen i sylinderen representerer klassen av mulige individer. Tenker man seg et plan som skjærer sylindren parallellt med bunnen vil snittet mellom planet og sylinderen utgjøre en sirkelflate og planet skjære linjen L i et bestemt punkt, la oss si w;1. w;1 vil da representere en mulig verden og de enkelte punkter på sirkelflaten mulige individer. På figuren har vi plukket ut visse punkter w;1, w;2, w;3, ... ,w;a, w;(a+1),.. som da følgelig representerer enkelte mulige verdener. De tilsvarende punktmengdene Ekst;(w;1)(e;1), Ekst;(w;2)(e;1), ..., Ekst;(w;(a+1))(e;1) representerer da tilsvarende mengder av mulige individer slik at de punktmengdene som er knyttet sammen med den sik-sak-pregede streken merket e;1 da står for delene av en ekstensjonsfunksjon og derfor representerer en bestemt egenskap, nemlig egenskapen e;1. Til høyre er avbildet deler av ekstensjonsfunksjonen til de to egenskapene e;1 og e;2. Som man ser varierer ekstensjonene til disse to funksjonene ettersom man går fra en mulig verden til en annen. Til venstre på figuren er avbildet en egenskap e;3 hvor ekstensjonen er den samme i alle mulige verdener. e;3 er derfor det man kan kalle en konstant eller rigid egenskap (Se §9). Det bør understrekes at denne figuren er helt uformell.

§8 Instanser av egenskaper.

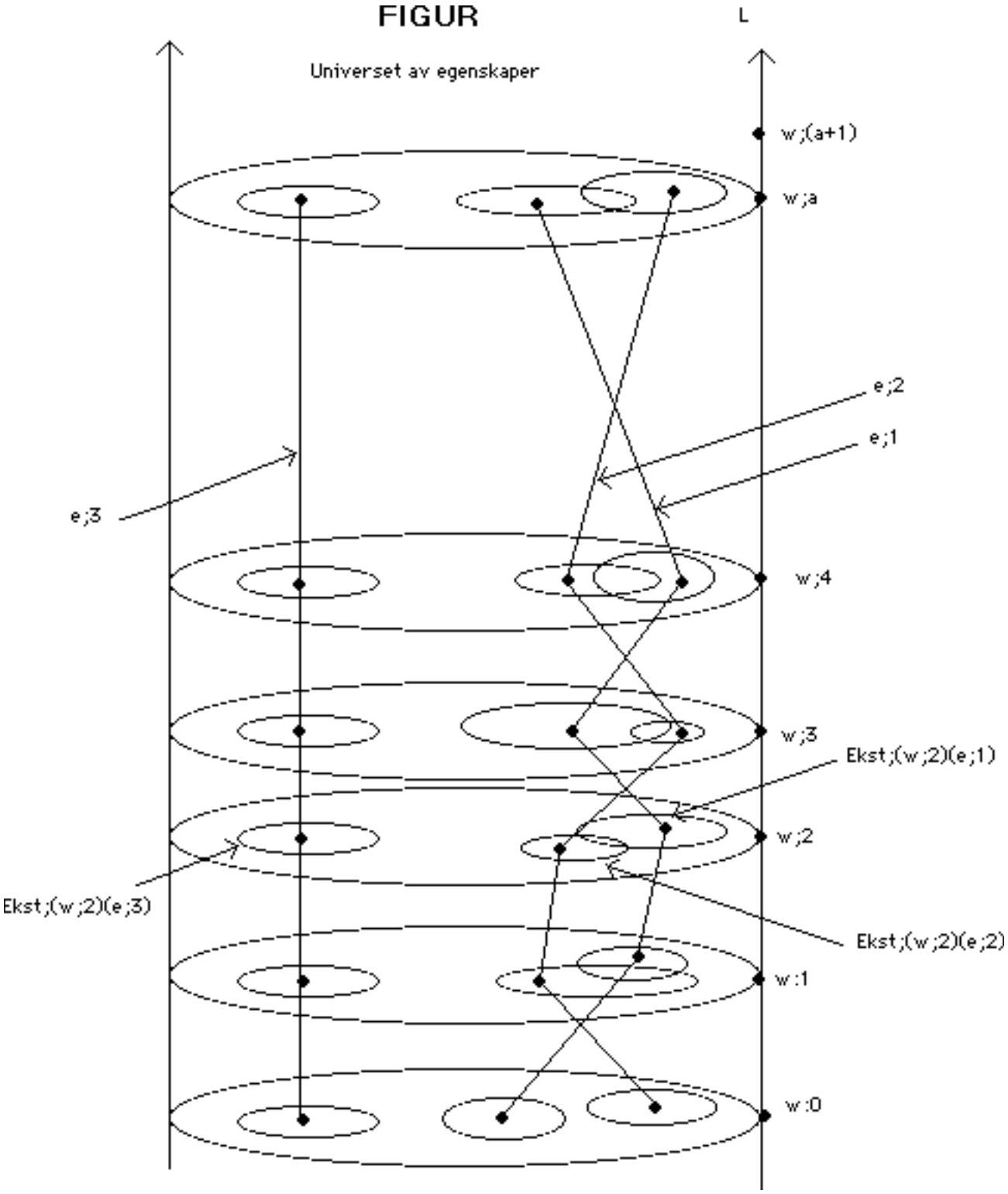
Anta x er en n-ær egenskap og at z er et n-tuple av mulige individer. Umiddelbart kan det da fortone seg rimelig å snakke om *det utsagnet at z har egenskapen x*. I så fall synes det svært plausibelt å si at dette utsagnet må være sant i alle de logisk mulige verdener hvor z faktisk har egenskapen x og usant i alle andre verdener. Nå er Mg(w: wêI & H(z,x,w)) mengden av alle de verdener hvor z har egenskapen x. Ifølge U4 finnes det da et utsagn som er sant i nøyaktig disse verdenene og ingen andre, nemlig utsagnet μ;-1(Mg(w: wêI & H(z,x,w))). Bruker vi uttrykket "u(x,z)" som forkortelse for det lengere uttrykket "utsagnet at z har egenskapen x" virker derfor følgende definisjon svært rimelig:

(1) u(x,z) = μ;-1(Mg(w: wêI & H(z,x,w)))

Merk i denne forbindelse at hvis a er en eller annen mengde med mulige verdener betegner "μ;-1(a)" det utsagnet som er sant i de verdenene som er med i a og som er usant i alle andre

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

verdener. Mao. betegner "μ;-1(a)" det utsagnet som har a som sin sannhetsmengde. I denne forbindelse kan man konsultere Rognes [2], §3, Definisjon 1 og også studere Teorem 4 i §4 i dette arbeid.



Er x en n-ær egenskap og zêD^n kalles u(x,z) for instansen av x med hensyn på z. Den funksjonen som tilordner hvert zêD^n utsagnet u(z,x) kalles for instansfunksjonen til x.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Denne betegnes med "p;n(x)" idet det forutsettes at n er et naturlig tall der n≥1. Man kan definere mer generelt en funksjon p;n som til enhver n-ær egenskap tilordner egenskapen dens instansfunksjon. Dette gjøres slik:

(2) p;n = Mg(<x, (dzêD^n)(u(z,x))> : At;n(x)) (n≥1) [10]

Som man ser fra definisjonen følger p;n(x) = (dzêD^n)(u(x,z)) og derfor at p;n(x)‘z = u(x,z) om At;n(x) og zêD^n. Man ser herav at p;n(x)= (dzêD^n)(u(z,x)) nettopp er den funksjonen som til hvert zêD^n tilordner u(x,z). Mao. er p;n(x) instansfunksjonen til egenskapen x. Det bør også bemerkes at p;n(x)êExp(U,D^n) om x er et n-ært attributt. Man kan nå vise at p;n er en funksjon som avbilder mengden av alle de n-ære egenskaper en-entydig på mengden av alle funksjonene i klassen Exp(U,D^n). Det følgende teorem uttrykker denne påstanden:

Teorem 14 (E;1) p;n : A;n –(1-1,på)–> Exp(U,D^n)

Denne setningen bevises ved hjelp av den følgende sats:

Teorem 15 (E;1) (a) Er fêExp(U,D^n) og nê(N-{ø}) gjelder:
(E!a)(At;n(a) & (Az)(zêD^n –> u(a,z)=f(z)))

(b) Er nê(N-{ø}) og At;n(a) gjelder videre:
(E!f)(fêExp(U,D^n) & (Az)(zêD^n –> u(a,z) = f(z)))

Funksjonen p;n (n≥1) kan også relateres til operasjonene Kon;(a,n) og Neg;(a,n) som ble innført tidligere. Det følgende teorem viser hvordan:

Teorem 16 (E;1) (a) Anta nê(N-{ø}) & zêD^n og at At;n(x). Da gjelder:
Neg(p;n(x)‘z) = u(Neg;(a,n)(x),z)
(b) Anta at M(x) & x Inkl A;n & zêD^n & nê(N-{ø}). Da gjelder:
SNu(Mg(p;n(y)‘z: yêx)) = u(Kon;(a,n)(x), z)

Det bør bemerkes at i Scott [1] kalles funksjonene i klassen Exp(2^I,D^n) for utsagnsfunksjoner (propositional functions). Siden 2^I på en naturlig måte kan korreleres med klassen av utsagn – funksjonene i 2^I kan oppfattes som de karakteristiske funksjonene til delmengdene av I som så i sin tur er i en-entydig korrespondanse med mengden av utsagn – er det en en-entydig korrespondanse mellom Exp(2^I,D^n) og Exp(U,D^n). I lys av teoremene ovenfor følger det derfor at egenskapene av grad n (n≥1) kan representeres ved de enkelte utsagnsfunksjonene i Exp(U,D^n).

Grunnen til at det ikke er helt unaturlig å kalle funksjonene i Exp(U,D^n) for utsagnsfunskjoner er denne: La F(x) være en eller annen åpen setning i et eller annet første-ordens språk som bare har x som fri variabel. For hver tilordning av et objekt a til variabelen x vil da F(x) uttrykke et bestemt utsagn. Formelen F(x) bestemmer derfor en utsagnsfunksjon i betydningen ovenfor. Åpne setninger av typen F(x) er det som opprinnelig ble kalt utsagnsfunksjoner i Principia Mathematica. Det er derfor naturlig å bruke dette uttrykket - som her ikke brukes om åpne setninger - om funksjonene i Exp(U,D^n) i stedet.

[10] Merk at (dF(x))(G(x)) hvor x er en variabel som forekommer fri i formlene F og G er definert på den følgende måte (dF(x))(G(x)) = Mg(<y,G(y)>: F(y)). Mao. er (dF(x))(G(x)) den funksjonen som til alle x som oppfyller kravet F(x) tilordner objektet G(x).

§9 Rigide egenskaper.

Det er en spesiell type egenskaper som det er verdt å nevne separat. Anta x er en n-ær egenskap. Vi kaller da egenskapen x for rigid dersom x har den samme ekstensjon i alle mulige verdener, mao. hvis og bare hvis x oppfyller det følgende krav:

(1) (Ea)(a Inkl D^n & M(a) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(x) = a))

Når det gjelder egenskaper av denne typen bemerker vi følgende:

For det første er det klart at man i teorien E;1 kan bevise eksistensen av rigide egenskaper. Er a en delmengde av D^n kan man betrakte den funksjonen f;a som til hver mulig verden tilordner denne mengden a, mao. f;a= Mg(<w,a>: wêI). I lys av A12 følger det da at det finnes en n-ær egenskap som har f;a som sin ekstensjonsfunksjon. Kalles denne egenskapen for e;0 ser man at den åpenbart må oppfylle kravet ovenfor og derfor må være en rigid egenskap. Det som her er nevnt viser også at det til enhver delmengde a av D^n finnes en rigid egenskap e(a) som er slik at (Aw)(wêI –> Ekst;w(e(a)) = a). Det følger at mengden av n-ære rigide egenskaper er likemektig med Pt(D^n). Siden Ca(D^n) ≥ Aleph;0 har man at Ca(Pt(D^n)) ≥ Ca(Reell). Det følger derfor også at mengden av rigide egenskaper i det minste må ha samme mektighet som kontinuumet.

For det andre er rigide egenskaper slik at enhver instans av dem enten er det nødvendig sanne utsagn, ie. t=μ;-1(I), eller er det kontradiktoriske utsagn, ie. k= μ;-1(ø). Det følgende teorem gir uttrykk for dette forhold:

Teorem 17 (E;1) Anta xêA;n og at zêD^n & nê(N-{ø}). Anta videre at x er en rigid egenskap. Da gjelder:

p;n(x)(z) = μ;-1(I) v p;n(x)(z) = μ;-1(ø)

Det skulle også være nokså lett å se at rigide egenskaper er slik at hvis et eller annet objekt har en slik egenskap i en bestemt verden så har dette objektet denne egenskapen også i enhver mulig annen verden. Det følgende teorem gir et formelt uttrykk for denne påstand:

Teorem 18 (E;1) Anta xêA;n og at zêD^n & nê(N-{ø}). Anta videre at x er en rigid egenskap. Da gjelder følgende:

(Ew)(wêI & H(z,x,w)) –> (Aw)(wêI –> H(z,x,w))

Helt tilslutt nevner vi at i Kripke [1] kalles singulære termer som har den samme referanse i alle mulige verdener for rigide betegnelser. Er a referansen til en slik betegnelse vil det naturligvis svare et rigid attributt til betegnelsen nemlig det unære attributtet hvis ekstensjonsfunksjon er Mg(<w,{a}>: wêI). Det er på grunn av denne nære sammenhengen med rigide betegnelser i Kripkes forstand at vi har tillatt oss å overføre ordet "rigid" til egenskaper. I alle tilfelle er klassen av egenskaper med en konstant ekstensjonsfunksjon en spesiell klasse som det er rimelig å vie spesiell oppmerksomhet.

§10 Om konsistensen til E;1 relativt til ZFCu(L;e)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

La I;0 være den intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L,e[Δ;0] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretike konstruksjonene i den betydning som er forklart i Rognes [2], §4 og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(i) I;0(MV(x)) = (MV(x))
(ii) I;0(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) I;0(True(w,x)) = (True(w,x))
(iv) I;0(At;n(x)) = (nê(N-{ø}) & xêExp(Pt(N^n),I)
(v) I;0(MI(x)) = (xêN)
(vi) I;0(H(x,y,w)) = (MV(w) & (En)(nê(N-{ø}) & yêExp(Pt(N^n),I)) & xêy(w))

Det skulle være nokså lett å se at dersom I;0 defineres på denne måten er I;0 entydig bestemt og at man dessuten har I;0 : Fm(L;e[Δ]) –> Fm(L;e[Δ;0]). Det følgende teorem gjelder om I;0. Beviset er gitt i Rognes [6].

Teorem 19 Anta I;0 er en intepretasjon av L;e[Δ] som oppfyller kravene nevnt ovenfor. Da gjelder for alle P:

PêFm(L;e[Δ]) & PêTh(E;1) –> I;0(P)êTh(T;1)

Her betegner "T;1" den teorien som ble definert i Rognes [2], §2.

Fra den måten I;0 er definert fremgår det umiddelbart at den følgende sats holder:

Teorem 20 Hvis P en vilkårlig formel der PêFm(L;e[Δ;0]) har man I;0(P)=P

I lys av definisjonene av teoriene T;1 og E;1 er det også klart at man har:

Teorem 21 Th(T;1) Inkl Th(E;1)

Den følgende sats er et enkelt korollar til Teorem 19 – 21:

Teorem 22 Th(E;1) Ω Fm(L;e[Δ;0]) = Th(T;1)

Inklusjonen mot venstre følger her umiddelbart fra Teorem 21 og det faktum at teoremene i T;1, Th(T;1), selvfølgelig er formler i L;e[Δ;0]. Inklusjonen mot høyre følger ved hjelp av Teorem 19 og 20. Fra Teorem 22 følger åpenbart at hvis en setning av typen P&¬P er et teorem i T;1 så er den også et teorem i E;1 og omvendt. Dette innbærer at følgende sats holder:

Teorem 23 E;1 er konsistent hvis og bare hvis T;1 er konsistent.

I Rognes [2] ble det bevist at T;1 er konsistent hvis og bare hvis ZFCu(L;e) er det. Fra dette og Teorem 23 følger så denne satsen:

Teorem 24 E;1 er konsistent relativt ZFCu(L;e)

Fra Teorem 22 følger også at E;1 er en konservativ utvidelse av T;1. Siden T;1 i sin tur er en konservativ utvidelse av ZFCu(L;e) følger det at E;1 også er en konservativ utvidelse av ZFCu(L;e). Disse to forhold er sammenfattet i den følgende sats:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 25 (i) E;1 er en konservativ utvidelse av T;1
(ii) E;1 er en konservativ utvidelse av ZFCu(L;e)

Ovenfor ble det nevnt at Th(E;2) Inkl Th(E;1). Det er imidlertid også nokså lett å vise at aksiomene A8 – A11 kan utledes i teorien E;2, dvs. kan utledes om man fra de ikke-logiske aksiomene i E;1 fjerner A8 – A11 og istedet erstatter dem med A12. Dette innebærer at alle teoremene i E;1 er teoremer i E;2, mao. at disse to teoriene er deduktivt ekvivalente. I lys av dette kan det følgende teorem oppfattes som et korollar til de satser som er nevnt ovenfor:

Teorem 26 (i) Th(E;1) Inkl Th(E;2)
(ii) Th(E;1) = Th(E;2)
(iii) E;2 er en konservativ utvidelse av T;1 og ZFCu(L;e)
(iv) E;2 er konsistent relativt til T;1 og ZFCu(L;e)

Når det gjelder intepretasjonen som ble definert ovenfor kan det bemerkes at denne ikke er den eneste intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] som oppfyller de følgende krav:

(i) PêFm(L;e[Δ]) & PêTh(E;1) –> I;0(P)êTh(T;1)
(ii) PêFm(L;e[Δ;0]) –> I;0(P)

og som i tillegg er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene. Hvis man i definisjonen av I;0 setter inn "Reell" overalt hvor det står "N" i klausulene (iv) – (vi) slik at man får:

(i) I;0(MV(x)) = (MV(x))
(ii) I;0(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) I;0(True(w,x)) = (True(w,x))
(iv) I;0(At;n(x)) = (nê(Reell-{ø}) & xêExp(Pt(Reell^n),I)
(v) I;0(MI(x)) = (xêReell)
(vi) I;0(H(x,y,w)) = (MV(w) & (En)(nê(Reell-{ø}) & yêExp(Pt(Reell^n),I)) & xêy(w))

vil denne intepretasjonen også ha egenskapene ovenfor. man kan forøvrig ganske lett vise at det finnes uendelig mange intepretasjoner av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] som oppfyller disse kravene.

Tidligere ble det n-ære nullattributtet definert ved:

$$Ø;n = (ix)(At;n(x) \& \neg(Ew)(Ey)(H(y,x,w)))$$

I forbindelse med denne definisjonen kan man spørre om Ø;n ≠ Ø;m dersom n,mê(N-{ø}) og m≠n. La oss kalle den følgende setning for "S;1" :

(An)(Am)(m,nê(N-{ø}) & m≠n –> Ø;n ≠ Ø;m)

La oss videre kalle den følgende setning for "S;2" :

(An)(Am)(m,nê(N-{ø}) & m≠n –> Ø;n = Ø;m)

Noe man kan gi bevis for i tilknytning til disse setningene er at E;1[S;1] såvel som E;1[S;2] er konsistente relativt til ZFCu(L;e). Siden man dessuten har at (¬S;2)êTh(E;1[S;1]) og ¬(S;1)êTh(E;1[S;2]) følger det at S;1 og S;2 begge er *uavhengige* av E;1. Når det gjelder S;2 kan våre resultater oppsummeres slik:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 27 (i) I;0(S;2)êTh(T;1)
(ii) (AP)(PêFm(L;e[Δ]) & PêTh(E;1[S;1]) –> I;0(P)êTh(T;1))
(iii) E;1[S;2] er konsistent relativt til T;1

La nå I;1 være en intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L,e[Δ;0] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretike konstruksjonene og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(i) I;1(MV(x)) = (MV(x))
(ii) I;1(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) I;1(True(w,x)) = (True(w,x))
(iv) I;1(At;n(x)) = (nê(N-{ø}) & xêExp(2^I, N^n)
(v) I;1(MI(x)) = (xêN)
(vi) I;1(H(x,y,w)) = (MV(w) & (En)(nê(N-{ø}) &
yêExp(2^I, N^n)) & xêDom(y) & y(x)‘w=1)

Da kan man vise at det følgende teorem holder:

Teorem 28 (i) I;1"(Th(E;1) Inkl Th(T;1)
(ii) I;1(S;1) êTh(T;1)
(iii) I;1"(Th(E;1[S;1]) inkl Th(T;1)
(iv) E;1[S;1] er konsistent relativt til T;1

Siden (¬S;2)êTh(E;1[S;1]) følger det at E;1[¬S;2] er konsistent relativt til T;1. Fra det som er nevnt ovenfor følger det også at man må ha:

Teorem 29 Er T;1 konsistent er hverken S;1 eller ¬S;1 noe teorem i E;1. Det gjelder også under den samme forutsetning at hverken S;2 eller ¬S;2 er noe teorem i E;1

I forbindelse med de betraktningene vi har fremsatt ovenfor angående Ø;n er også den følgende sats av en viss interesse:

Teorem 30 Er P setningen "(Ex)(En)(nê(N-{ø}) &n≥1 & At;n(x) & At;1(x))" og er T;1 konsistent så er hverken P eller ¬P noe teorem i E;1.

Dette teoremet viser at A;n ikke nødvendigvis er bevisbart disjunkt med A;1 og det viser også at A;n-{Ø;n} heller ikke er bevistbart disjunkt i E;1 med A;1 – {Ø;1} om nê(N-{ø}) & n≥2. I E;1 kan man også bevise den følgende setning:

Teorem 31 (E;1) Anta nê(N-{ø}) og n,m≥2. Anta n≠m. Da gjelder:
(A;n -{Ø;n}) Ω (A;m-{Ø;m}) =ø

Merk at man her må utelukke Ø;n og Ø;m fra henholdsvis A;n og A;m fordi det fremgår fra teoremene som ble nevnt ovenfor at vi ikke i E;1 kan bevise
Ø;n ≠ Ø;m om m≠ n og m,n≥2

Den følgende sats er også av interesse i denne forbindelse. Merk at "Ur" betegner klassen av urindivider, dvs. at Ur = Mg(x: ¬M(x)).

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 32 (E;1) (i) D Inkl Ur & n>1 & nê(N-{ø})–>
(A;n-{Ø;n})Ω(A;1–{Ø;1}) =ø
(ii) D Inkl Ur –> (Am)(An)(m≠n & m,nê(N-{ø}) –>
((A;n - {Ø:n]) Ω (A;m - {Ø;m})) = ø)

Kommentaren som fulgte etter det forrige teoremet kan gjentas her. Det kan være av interesse å gi et detaljert bevis for disse setningene siden man neppe kan sies å ha en helt tilfredsstillende forståelse for hva det vil si at noe er et n-ært attributt om man ikke helt ut skjønner hvorfor disse setningene holder. Spesielt kan det virke eiendommelig at et monadisk attributt samtidig kan være en egenskap av grad n for noe n>1 og det kan derfor være viktig å ha klart for seg hva som faktisk er grunnen til at dette er tilfelle. Bevisene for disse teoremene vil imidlertid ikke bli gitt her. De er gitt i Rognes [6].

§11 Strukturen til mengden D.

Ingen av aksiomene i E;1, A1 – A11 sier noe direkte om mengden av mulige individer utover det at den er minst tellbart uendelig. En ting man imidlertid kan vise om klassen av de n-ære attributtene er den har større mektighet en D. I lys av de isomorfi-teoremer som det ble gjort rede for tidligere har vi:

Teorem 33 (i) nê(N-{ø}) –>
Exp(2^I, D^n) ≈ Exp(Pt(D^n),I) » Pt(D^n) » D^n
(ii) nê(N-{ø}) –> A;n ≈ Exp(2^I,D^n)
(iii) nê(N-{ø}) –> A;n » D^n

Definerer man mengden av alle egenskaper som unionen av de diverse A;n ettersom n gjennomløper N-{ø}, og betegner denne mengden med "E", har man at E = UN(Mg(A;n : nê(N-{ø}))) . I lys av teoremet ovenfor har vi dessuten at :

Teorem 34 E » D

Det følger fra dette teoremet at ikke alle elementene i E kan være mulige individer. For var E inkludert i D ville selvfølgelig E være mindre eller likemektig med D, men dette strider mot satsen ovenfor.

Fra en intuitiv synsvinkel er det meningen at D skal representere mengden av absolutt alle mulige individer, dvs. alle entiteter som i en viss forstand er tenkelige. Umiddelbart kunne det da virke rimelig å kreve at D oppfyller skulle oppfylle de følgende betingelser:

(a) For det første virker det rimelig å anta at alle de mulige verdenene skulle være mulige individer. Mao. burde man kanskje kreve:

(1) I Inkl D

(b) For det andre virker det rimelig tenke seg at også alle de enkelte utsagn skulle kunne regnes som mulige individer. I så fall kunne man kreve:

(2) U Inkl D

(c) For det tredje ville det være eiendommelig om ikke urindividene, Ur, definert ved Ur = Mg(x: ¬M(x)), ble regnet som mulige individer. I så fall ville det være berettiget å fordre:

(3) Ur Inkl D

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(d) La nå D;0 = Un(Un(I,Ur),U). Mao. er D;0 mengden som inneholder nøyaktig de mulige verdenene, utsagnene og alle urindividene. Er da x et n-ært attributt hvor ekstensjonen i hver mulig verden er inkludert i D;0 skulle man kanskje tro at x også burde regnes som et mulig individ. Mao.:

(4) (An)(Ay)(At;n(y) & nê(N-{ø}) &
(Aw)(wêI –> Ekst;w(y) Inkl D;0). –> yêD)

(e) Man kunne på dette punkt tenke seg å gå et skritt videre. La X være en vilkårlig mengde som er inkludert i D og betrakt operasjonen som til X tilordner mengden av alle attributter som i enhver verden har sin ekstensjon inkludert i X, mao. betrakt operasjonen Q definert ved :

Q(X) = Mg(y: (En)(nê(N-{ø}) & At;n(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) Inkl X^n)))

ved hjelp av denne definisjonen kan man induktivt definere en sekvens <V(n)>/nêN/ slik:

(i) V(0) = D;0

(ii) V(n+1) = V(n)U Q(V(n)) om nêN

Som man ser er V(n) ettersom n –> ∞ en stadig mer omfattende mengde. Fra definisjonen fremgår det at V(n) Inkl V(n+1) for alle nêN. Det virker nå ikke helt urimelig å kreve at enhver entitet som er med i V(n) for et eller annet tall n er et mulig individ. I så fall virker det naturlig å betrakte den følgende formel i L;e[Δ]:

A13 UN/nêN/(V(n)) Inkl D

En rekke spørsmål kan stilles i forbindelse med A13. Er det f.eks. mulig å utvide E;1 med A13 som et nytt ikke-logisk aksiom og få som resultat et system som er konsistent relativt til ZFCu(L;e) ? Det virker som om dette er tilfelle, men det må medgis at dette ved det nåværende tidspunkt er en ren gjetning. Så langt har vi ikke gitt noe formelt bevis for dette.

Sekvensen <V(n)>/nêN/ kunne kalles det kumulative attributthierarki over D;0 med høyde *w*. Hierarkiet kunne ha blitt fortsatt på transfinite nivåer og A13 kunne i så fall ha blitt erstattet med sterkere formler. Man kan også spørre om A13 er uavhengig av E;1, eventuelt E;2 som er deduktivt ekvivalent med E;1. Også ved dette spørsmål virker det ikke helt uberettiget å tro at svaret er bekreftende. Imidlertid har vi ikke studert problemet detaljert slik at det her må forbli ubesvart.

Vi avslutter denne paragrafen ved å henvise leseren til figuren på neste side. Figuren gir en slags anskuelig illustrasjon av egenskapshierarkiet over D;0 opp til *w*.

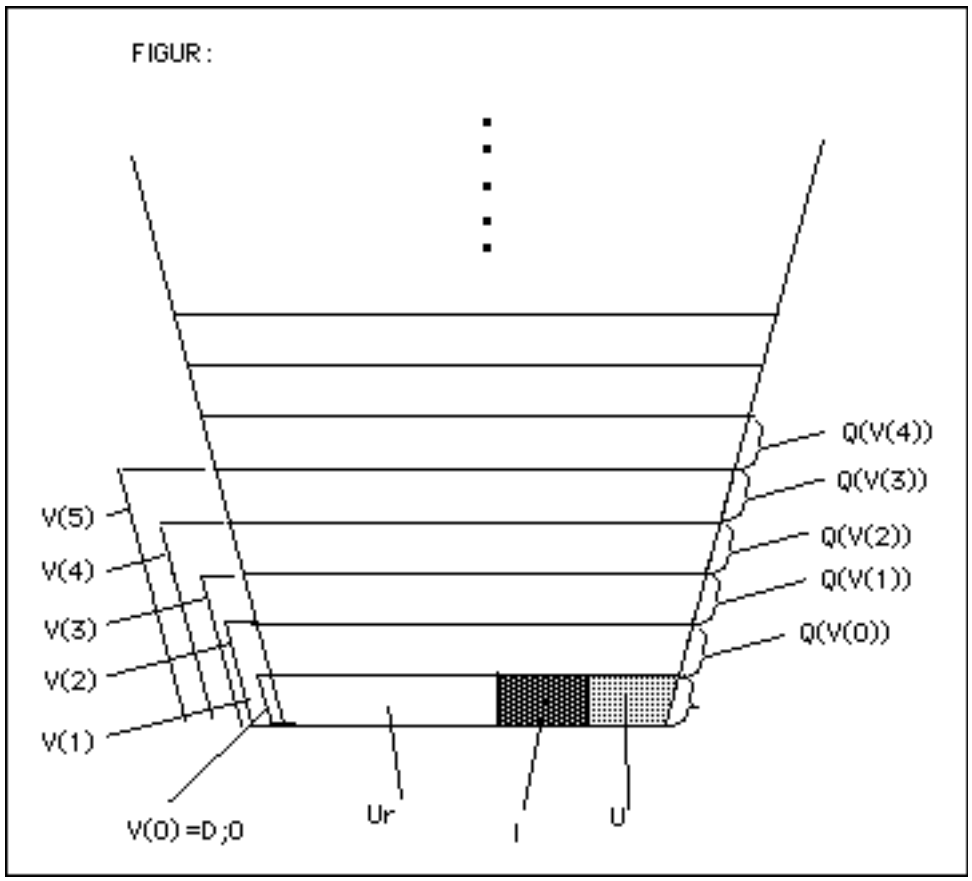
§12 Noen kritiske bemerkninger om E;1

Vi har så langt beskrevet de grunnleggende trekk ved egenskapsteorien E;1 og den ekvivalente teorien E;2. Imidlertid har disse to teoriene visse uheldige sider som vi forsåvidt har antydet, men som nå vil bli gransket nøyere. Det er disse mindre heldige sider ved de nevnte teorier som er emnet i denne paragrafen.

I følge aksiom A5 i E;1 har vi at D=Mg(x: MI(x)) eksisterer, mao. at mengden av alle mulige individer eksisterer. I lys av de mengdeteoretiske aksiomene som vi har inkludert i E;1 innebærer dette at vi kan utlede at Pt(D)
har større mektighet enn D. Dette innebærer at det i sin tur må finnes visse elementer i Pt(D) som ikke er med i D. Fra definisjonen av D ser man så at disse elementene ikke er mulige individer. Dette kan vel oppfattes som noe kunstig. Og det kan i særlig grad virke merkelig

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

om man antar at ethvert mulig individ er en entitet som det eksisterer sanne eller usanne utsagn om. Angående de nevnte entiteter, ie. elementene i Pt(D) – D, virker det rimelig å tro at at det finnes sanne eller usanne utsgn om dem. I så tilfelle må man enten oppgi denne antagelsen eller A5. Lignende overveielser i forbindelse med klassen E, som også må være av større mektighet enn D, og sogar overveielser angående D selv, leder en inn på tanker av samme type.



Hvis D faktisk er en mengde, burde den ikke da selv være et mulig individ, og må den ikke da være et element i seg selv, dvs. må vi ikke ha DêD? Imidlertid er dette siste utelukket av våre mengdeteoretiske aksiomer, og fastholder vi dem ledes vi enten til å forkaste A5 eller til overveielser som gjør det fornuftig å tro at D selv ikke er noe mulig individ. Det bør imidlertid bemerkes at det her ikke er tale om noen formell logisk gjendrivelse av E;1. Dette kan det ikke være tale om fordi vi tidligere har gitt et rimelig konsistensbevis for teorien. Det dreier seg snarere om å påpeke visse konsekvenser ved denne teori som kan virke merkverdige fra en intuitiv synsvinkel. De bemerkninger som her er fremsatt i forbindelse med E;1 kan naturligvis gjentas i forbindelse med den deduktivt ekvivalente teorien E;2.

§13 Noen flere betraktninger over eksistensen til mengden D.

Selvom bemerkningene ovenfor kan virke slik at man overbevises om urimeligheten av A5 kan man argumentere for at saken muligens ikke er så enkel som diskusjonen ovenfor gir inntrykk av.

Den følgende formel virker intuitivt sett svært rimelig:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

I1 $At;1(x) \,\&\, w\hat{e}I \,\&\, H(z,x,w) \rightarrow MI(z)$

Uansett hva man måtte mene om mulige individer synes man å måtte akseptere I1. Man kan bemerke at I1 følger umiddelbart fra A3 om man i dette aksiom setter n=1. Også den følgende formel virker svært plausibel:

I2 $(Ex)(At;1(x)) \,\&\, (Ex)(MV(x))$

Som man ser uttrykker denne formelen bare at det finnes minst ett unært attributt og at det finnes minst en mulig verden. Dette kan vel vanskelig benektes om man ønsker å bygge opp en teori om attributter.

Vår neste formel sier at hvis x er en unær egenskap og w er en mulig verden så eksisterer mengden av alle de mulige individene som har egenskapen x i verdenen w. Mao. er ekstensjonen til x i w en mengde som befinner seg på et bestemt nivå i det kumulative hierarki, og som derfor ikke er det som av a og til kalles for en "ekte" mengde (proper class).

I3 $(At;1(x) \,\&\, w\hat{e}I) \rightarrow (Ez)(M(z) \,\&\, z = Mg(y: H(y,x,w)))$

Også denne formelen må sies å være svært plausibel. Merk at I2 kan utledes fra aksiom A10. I3 kan utledes ved hjelp av A5, A3 og våre mengdeteoretiske aksiomer. De sistnevnte stiller vi, som allerede nevnt, ikke noe spørsmålstegn ved. Imidlertid er I3 langt svakere enn A5 og A3. Fra I3 i seg selv kan man ikke utlede noe om eksistensen til D.

Tilslutt betraktes:

I4 $At;1(x) \rightarrow (Ey)(At;1(y) \,\&\, (Aw)(Az)(w\hat{e}I \,\&\, MI(z). \rightarrow (H(z,y,w) \leftrightarrow \neg H(z,x,w))))$

Denne setningen følger fra aksiom A8 om man setter n=1. Også i forbindelse med I4 må man vel kunne si at denne formelen uttrykker en tanke som intuitivt sett virker forholdsvis rimelig.

Imidlertid kan man vise at konjunksjonen av de fire setningene I1 – I4 impliserer setningen A5. I dette beviset behøver man bare å benytte de mengdeteoretiske og logiske aksiomene som vi har nevnt. Man behøver ikke å trekke inn noen prinsipper fra E;1 utover dette. Hvis man derfor anser I1 –I4 som plausible samtidig som man er tilbøyelig til å se på A5 som uplausibel, må det nok kunne sies at man har noe "sprikende" intuisjoner. Noe må i så fall vike: enten ett eller flere av prinsippene I1 – I4 eller A5, hvis man da ikke vil revidere det mengdeteoretiske eller logiske grunnlag. Men dette virker svært drastisk i denne sammenheng.

Det følgende teorem uttrykke at A5 lar seg utlede fra I1 – I4:

Teorem 35 $(ZFCu(L;e[\Delta]))\ \ (I1 \,\&\, I2 \,\&\, I3 \,\&\, I4) \rightarrow A5$

Hvordan skal man så løse den knuten som dette resultat representerer? En mulig løsning er den følgende: Man aksepterer A5 som urimelig og forkaster dette postulat. Det mest naturlige ville være å erstatte det med setningen $(Ax)MI(x)$ som uttrykker at ethvert objekt, hva enten det er en mengde, et urindivid, eller en egenskap er et mulig individ. Man må selvfølgelig også vrake et eller annet av prinsippene I1 – I4. Det minst innlysende av disse synes å være I4. En mulighet er derfor at man fjerner I4 og A5 og erstatter dem med $(Ax)MI(x)$ og forøvrig beholder I1 – I3.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Vi skal nå betrakte en annen teori, E;3, hvor prinsippene A1 – A12 er erstattet av visse andre, men der vi har beholdt det logiske og mengdeteoretiske grunnlaget samt aksiomene U1 – U4. Denne teori besværes ikke av de vanskelighetene som ble nevnt ovenfor og har den fordel at E;1 kan intepreteres inn i den på en forholdsvis naturlig måte. Dette innebærer at de vesentlige intuisjoner bak teorien E;1 i en viss forstand er bevart i den nye teorien.[11]

§14 Aksiomene i teorien E;3.

Vi utvider systemet ZFCu(L;e[Δ]) , som ble definert i Rognes [2], i første omgang med U1 – U4. Dernest legger vi til de følgende setninger som nye ikke-logiske aksiomer:

E1 At;n(x) –> nê(N-{ø})
E2 H(x,y,w) –> (wêI & At;1(y))
E3 (Aw)(wêI & At;1(y) –> (Ez)(M(z) & z= Mg(x: H(x,y,w))))
E4 At;1(y;1) & At;1(y;2) –>
(y;1 =y;2 <–> (Aw)(wêI –> Ekst;w(y;1) = Ekst;w(y;2)))
E5 (M(x) & f: I –> Pt(x)) –> (Ey)(At;1(y) & (Aw)(wêI –> f(w) = Ekst;w(y)))
E6 nê(N-{ø}) –> (At;n(y) <–>
(At;1(y) & (Ez)(M(z) & (Aw)(Ax)(wêI & H(x,y,w) –> xêz^n))))
E7 MI(x) <–> x=x

Dette avslutter listen over de ikke-logiske aksiomene i E;3 og dermed definisjonen av teorien E;3.[12] Som man ser fra listen over setningene E1– E7 er E1 og E2 i det vesentlige identiske med aksiomene A1 og A2 i E;1. E;3 representerer en ny idé som ikke er eksplisitt postulert i E;1 (Selvom E3 kan utledes i E;1), nemlig at dersom y er et monadisk attributt så er alltid ekstensjonen til y i en verden w en mengde. E4 er som man ser en versjon av identitetsaksiomet for egenskaper og E5 kan oppfattes som en forenklet versjon av A12. Man får E5 fra A12 om man setter n=1 i den sistnevnte setning. Tilslutt angir E6 hva som er nødvendige og tilstrekkelige vilkår for at noe skal være et attributt av grad n (n≥1) og E7 karakteriserer de mulige individene som de og bare de entiteter som er identiske med seg selv.

§15 Noen viktige trekk ved teorien E;3.

Fra aksiomet E7 og definisjonen av D fremgår det at D=Mg(x: x=x). De mulige individene er altså alle de entitetene som er identiske med seg selv, mao. er D den universelle mengden. I ZF er det imidlertid slik at man ikke kan vise eksistensen av mengder som i en viss forstand er "for store". Dette gjelder blandt annet allmengden. Et lignende forhold gjelder i teorien E;3 som er en utvidelse av en modifisert versjon av ZF. Innenfor rammen av denne teori kan man heller ikke bevise eksistensen av mengden av alle mulige individer slik det følgende teorem viser:

---

[11] Et sammendrag av teorien E;3 er gitt i et notat av forfatteren. Se Rognes [4], 1985.

[12] Postulerer man MI(x) <–> x=x er det klart at man kan sløyfe predikatet "MI(x)" fra L;e[Δ]. I så tilfelle får E;3 et primitivt predikat mindre. Dette er selvfølgelig naturlig. Når predikatet likevel beholdes her som et primitivt predikat er det mest for å minne om kontinuiteten mellom E;1 (E;2) og E;3. Dessuten er det fullstendig harmløst.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 36 (E;3) (i) ¬(Ey)(M(y) & y=Mg(x: x=x))
(ii) ¬(Ey)(M(y) & y=D)
(iii) ¬A5

Et annet trekk ved E;3 er at man heller ikke kan bevise eksistensen av mengden av alle egenskaper av grad n (n≥1). Mao. kan man i E;3 utlede negasjonen av A4. Vi har:

Teorem 37 (E;3) nê(N-{ø}) –> ¬(Ey)(M(y) & y=Mg(x: At;n(x)))

Begge disse trekk kunne sies å tale til fordel for E;3 siden vi tidligere ga uttrykk for nettopp visse betenkeligheter ved A4 og A5. Det bør også nevnes at man i E;3 kan vise at mengden av alle mengder ikke kan eksistere slik det følgende teorem viser. Dette er selvfølgelig fordi ZFCu(L;e) er et subsystem av E;3.

Teorem 38 (E;3) ¬(Ey)(M(y) & y=Mg(x: M(x)))

Studerer man aksiomsystemet E1 – E7 i lys av de bemerkningene vi gjorde angående I1 – I4 og A5 ser man at vi har oppgitt I4 (negasjonsaksiomet), men har beholdt de øvrige prinsipper I1 – I3. Man ser at I3 gjenfinnes på listen som E3, at I1 lar seg utlede ved hjelp av E7 og at I2 følger fra aksiomet E5.

Det vil nå bli vist hvordan teorien E;1 (og dermed den ekvivalente teorien E;2) kan tolkes inn i E;3. Først defineres hva som forstås med et n-ært attributt y relativt til området X, i symboler "At;n(X,y)" der X er en mengde. y er et nært attributt relativt til mengden X om ekstensjonen til y i hver verden er inkludert i mengden X^n:

(1) At;n(X,y) <–> [At;n(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y) Inkl X^n)]

Man kan nå uten spesielle vanskeligheter gi bevis for det følgende teorem:

Teorem 39 (E;3)
(i) M(X) & At;n(X,x) –> nê(N-{ø})
(ii) H(x,y,w) –> (wêI &(EX)(M(X) &(En)(nê(N-{ø}) & At;n(X,y))))
(iii) M(X) & H(x,y,w) & At;n(X,y) –> xêX^n
(iv) M(X) & nê(N-{ø}) –> (Ey)(M(y) & y = Mg(x: At;n(X,x)))
(v) M(X) –> (Ey)(M(y) & y= X)
(vi) M(X) & Ca(X)≥ Aleph;0 –> Ca(X) ≥Aleph;0
(vii) M(X) & At;n(X,y;1) & At;n(X,y;2) & nê(N-{ø}) &
(Aw)(wêI –> Mg(x: H(x,y;1,w)) = Mg(x: H(x,y;2,w)). –>
y;1 = y;2.

Som man ser ved å studere dette teoremet nærmere iaktar man en sterk analogi mellom formlene (i) – (vii) og aksiomene A1 – A7. En tilsvarende analogi kan iaktas mellom (i) – (iv) i det følgende teorem og aksiomene A8 – A11:

Teorem 40 (E;3)
(i) M(X) & At;n(X,x) –> (Ey)(At;n(X,y) &
(Az)(Aw)(wêI & zêX^n –> (H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))
(ii) M(X) & M(a) & (Ax)(xêa –> At;n(X,x)) –>
(Ey)(At;n(X,y) & (Az)(Aw)(wêI & zêX^n –>

(H(z,y,w) <–>(Ax)(xêa –>H(z,x,w))))

(iii) M(X) & x Inkl X^n & M(x) & nê(N-{ø}) & wêI –>
(Ez)(At;n(X,z) & Ekst;w(z) = x)

(iv) M(X) & M(x) & x Inkl X^n &
w;1≠w;2 & w;1,w;2êI & nê(N-{ø}) –>
(Ey)(Ez)(At;n(X,y) & At;n(X,z) &
Ekst;(w;1)(y)=Ekst;(w;2)(z) =x &
Ekst;(w;2)(y) Ω Ekst;(w;2)(z) =ø)

Fra Teorem 39 og 40 fremgår det at ethvert system:

<< Mg(x: At;n(X,x))>/nê(N-{ø}/,X>

oppfyller aksiomene A1 – A12 om vi antar X er en mengde og Ca(X) ≥ Aleph;0. Man kan også formulere dette reultatet slik: La H være relasjonen definert ved:
H= Mg(<x,y,z>: H(x,y,z)) og definer AT(n,X) ved AT(n,X) = Mg(x: At;n(X,x)). AT(n,X) er da klassen av alle n-ære attributter over mengden X. Man kan da si at teoremene ovenfor viser at ethvert triple av typen <H, <AT(n,X)>/nê(N-{ø}/, X> utgjør en modell for aksiomene A1 – A12 i teorien E;1. En tredje måte å sammenfatte innholdet i disse teoremene på ville være å si at E;1 "overlever uavkortet" innenfor E;3 men i en relativisert form i relasjon til en eller annen overtellbar mengde X.[13]

Noe som skiller E;1 fra E,3 er at man ikke i sin allminnelighet kan vise eksistensen av negasjonen til et attributt innenfor rammen av E;3. Fra (i) i Teorem 40 fremgår det at hvis x er et attributt over området X finnes komplementet til x med hensyn på dette området. Men defineres Neg;(a,1)(x) for xêA;1 på den måten som tidligere har blitt foreslått finnes ikke dette komplementet:

Teorem 41 (E;3)

(i) At;n(x) & nê(N-{ø}) –> ¬(Ey)(At;n(y) &
(Aw)(wêI & zêD^n –>(H(z,y,w) <–> ¬H(z,x,w))))

(ii) At;n(x) & nê(N-{ø}) –> ¬(Ey)(y = Neg;(a,n)(x))

Det er også forholdsvis lett å vise at heller ikke mengden av alle n-ære egenskaper finnes:

Teorem 42 (E;3) Anta nê(N-{ø}). Da gjelder: ¬(Ey)(M(y) & y = Mg(x: At;n(x)))

Vi har nå sett på enkelte viktige trekk ved E;3. I neste paragraf vil vi studere forhold som har med systemets relative konsistens å gjøre. Men før dette skjer vil enkelte andre trekk ved teorien kommenteres.

En teori som E;3 er en generell teori om egenskaper, på samme måte som ZFC er en generell teori om mengder. ZFC uttaler seg ikke om spesielle mengder av empirisk gitte størrelser, slik som f.eks. mengden av alle mennesker, mengden av protoner, mengden av atomer som nå befinner seg i solens indre eller andre mengder av entiteter som inngår i gjenstandsområdene som de enkelte empiriske vitenskapelige teorier sier noe om. På

[13] Man kunne kanskje hevde at teorien E;3 er en korrigering av E;1 samtidig som den bevarer det ved E;1 som er verdt å bevare og dessuten gir en forklaring på hvorfor E;1 feiler. Uten sammenligning forøvrig har man hevdet at et lignende forhold eksisterer mellom Einsteins relativitetsteori og Newtons mekanikk. Relativitetsteorien korrigerer Newtons mekanikk, men viser samtidig hvorfor det er naturlig å tro på de Newtonske prinsipper ved å vise at disse holder tilnærmelsesvis under visse omstendigheter. Man har også påpekt at analoge betraktninger kan gjøres gjeldene når det gjelder Newtons mekanikk i relasjon til Galileis og Keplers lover. For en mer detaljert diskusjon av disse forhold kan man studere Popper [1], side 197 - 202.

tilsvarende vis forholder det seg med E;3. Denne teorien (og de andre teoriene vi har betraktet) sier intet spesifikt om la oss si en egenskap som den å være en rød materiell gjenstand, eller egenskapen å være et proton. Heller ikke er det slik at en konstruksjon som f. eks. "x er egenskapen å være et proton" kan defineres utelukkende ved hjelp av de predikatene og logiske konstruksjonene som inngår i språket til E;3, like lite som som et predikat av typen "x er mengden av alle protoner" kan defineres utelukkende ved hjelp av de logiske konstruksjonene og medlemskapspredikatet. Selvfølgelig kan spesielle mengder defineres i ZFC, f.eks. ø, {ø}, Reell, Nat, *w,* etc. Likeledes en uendelig mengde med funksjoner og relasjoner av rent matematisk karakter. Helt tilsvarende forhold gjelder i forbindelse med E;3 når det gjelder egenskaper. En uendelighet av rigide attributter, f.eks. det rigide attributt som har {ø} som sin ekstensjon i alle mulige verdener, kan defineres eksplisitt i L;e[Δ]. Men spesielle empiriske egenskaper kan man neppe definere innenfor denne rammen selvom man i E;3, for det første kan vise eksistensen av slike (med en "empirisk egenskap" forstår vi her en egenskap som ikke er rigid) og for det andre kan vise en rekke satser om empiriske egenskaper som oppfyller betingelser som kan uttrykkes i L;e[Δ]. Ønsker man imidlertid å si noe mer spesifikt om slike egenskaper som f.eks. egenskapen å være et menneske må L;e[Δ] utvides med nye konstruksjoner som gjør dette mulig.

I mangel av et bedre sted setter vi også inn her enkelte bemerkninger om mulige individer. I forbindelse med mulige individer har man av og til tenkt seg at visse mulige individer, f.eks. et fysisk objekt som en tavle eller et bord, kan manifesteres forskjellig i forskjellige mulige verdener. Det molekylkomplekset som utgjør bordet b i verdenen w;1 behøver ikke være identisk med det molekylkomplekset som utgjør bordet b i verdenen w;2. For noen mulige individers vedkommende, la oss si et bestemt mulig individ x, kunne man derfor tenke seg at det korresponderte en funksjon f;x hvor domenet er inkludert i mengden av mulige verdener, og hvor f;x(w) er manifestasjonen av x i verdenen w, om w er en verden i domenet. [14] Et predikat som " x er en manifestasjon av det mulige individet y i verdenen w" inngår ikke blandt de primitive predikatene i L;e[Δ] og det forutsettes ikke i forbindelse med noen av de teorier som er blitt betraktet at det gir mening. Men man kan fra en formell synsvinkel godt utvide L;e[Δ] med dette predikatet og i det språket som fremkommer som resultat forsøke å formulere setninger som inneholder predikatet og som virker interessante. Dernest kan man undersøke hva som lar seg utlede fra setningene innenfor den rammen vi har angitt tidligere. Forkortes den nevnte konstruksjon med "Manf(x,y,w)" kunne man blandt annet betrakte og diskutere de følgende setninger:

MF1 MI(x) & Manf(y,x,w) –> (E!y)(Manf(y,x,w))
MF2 Manf(y,x,w) –> MI(x) & MV(w)

Den siste av disse to setningene virker triviell. Den første er kanskje mer diskutabel. Muligens er det også slik at hvis y er en manifestasjon av objektet x i verdenen w så er y selv et mulig individ:

MF3 Manf(y,x,w) –> MI(y)

Man kan også betrakte en lang rekke andre setninger av mer eller mindre tvilsom art i denne forbindelse. Vi har bare nevnt MF1 – MF3 her for å antyde noen utviklingsmuligheter når det

[14] Man kan i denne forbindelse studere Cresswell [1], side 94 - 100. Lignende synspunkter finner man også hos Hintikka i Hintikka [1], essayet "Semantics for propositional attitides". Forfatteren kommer her i noen grad inn på spørsmålet om kryssidentifikasjon mellom mulige verdener og "individuerende funksjoner" av den typen vi har antydet ovenfor.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

gjelder teorien E;3 og fordi en seriøs diskusjon av disse og andre setninger kan ha en viss filosofisk interesse.[15]

§16 Konsistensen til E;3 relativt til ZFCu(L;e[Δ])

I det følgende betegner "L;e[Δ]" språket til E;3 (som er det samme som språket til E;1 og E;2). "L;e[Δ;0]" betegner språket til T;1, dvs. den utsagnsteorien som ble drøftet i Rognes [2]. Vi definerer nå en intepretasjon q av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] ved å stipulere at q skal være normal med hensyn på de logiske og mengde-teoretiske konstruksjonene og dessuten oppfylle de følgende krav:

(i) q(MV(x)) = (MV(x))
(ii) q(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) q(True(w,x)) = (True(w,x))
(iv) q(At;n(x)) = (nê(N-{ø}) &
(Ey)(M(y) & x: I –> Pt(y^n) & UN(Rgn(x)) Inkl y^n))
(v) q(MI(x)) = (x=x)
(vi) q(H(x,y,w)) = ((Er)(M(r) & y: I –> Pt(r) &
UN(Rgn(y)) = r & zêI & xêy(z))

Med dette er gitt en fullstendig definisjon av intepretasjonsfunksjonen q. Det er nå mulig å vise det følgende teorem:

Teorem 43 La q være den intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;0] som ble definert ovenfor. Om denne intepretasjonen gjelder:
(i) PêFm(L;e[Δ;0]) –> q(P) = P
(ii) PêFm(L;e[Δ]) & PêTh(E;3) –> q(P)êTh(T;1)

Fra det siste punktet i dette teoremet fremgår det at om man kan utlede en motsigelse i E;3 kan man også utlede en motsigelse i T;1. Siden det følger fra et resultat som det er gjort rede for i Rognes [2] at T;1 er konsistent relativt til ZFCu(L;e) følger det fra dette at E;3 også er konsistent relativt til ZFCu(L,e). Fra teoremet ovenfor skulle det også være forholdsvis enkelt å se at E;3 er en konservativ ekstensjon av T;1 og derfor – siden T;1 i sin tur er en konservativ utvidelse av ZFCu(L;e) – at E;3 også har denne egenskap. De nevnte forhold kan oppsummeres i det følgende teorem:

Teorem 44
(i) E;3 er konsistent relativt til T;1 og ZFCu(L;e).
(ii) E;3 er en konservativ utvidelse av T;1 såvel som ZFCu(L;e)

§17 Forholdet mellom mengder og egenskaper i teorien E;3.

Fra en intuitiv synsvinkel kan endel sies til fordel for den tanke at ingen egenskap er en mengde. Til enhver egenskap svarer riktignok en entydig bestemt ekstensjonsfunksjon og

[15] Angående endel kritiske kommentarer til det som i denne forbindelse av og til kalles kryssidentifikasjon av mulige individer mellom mulige verdener henvises til Kripke [1], side 42 - 53.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

dette korrelat til egenskapen bør oppfattes som en mengde idet funksjoner jo er mengder av ordnete par og derfor mengder av spesiell art. Men en egenskap er ikke uten videre identisk med sin ekstensjonsfunksjon. Man kan identifisere disse to, men det kan være av teoretisk interesse å utforme standpunkter som innebærer at disse to ting ikke er identiske.

Nå er det slik at selvom man anser enhver egenskap som forskjellig fra sin ekstensjonsfunksjon innebærer ikke dette nødvendigvis at egenskaper er noe helt annet en mengder. Man bør sondre mellom følgende to påstander:

(1) $(Ax)(At;1(x) \rightarrow x=EFunc;1(x))$
(2) $(Ax)(At;1(x) \rightarrow M(x))$

Av disse to setningene er den siste svakere enn den første. Man kan også i denne forbindelse nevne at begge setningene kan vises å være uavhengige av E;3 og at (1) er uavhengig av det system som man får når E;3 utvides med (2) som et eventuelt nytt aksiom. Disse påstandene skal ikke bevises her. Det man imidlertid kan vise i E;3 er derfor hverken (1) eller (2), men man kan faktisk vise at det må finnes visse egenskaper som er mengder, mao. at ikke enhver egenskap kan være et urindivid. Man har:

Teorem 45 (E;3) $(Ax)(M(x) \rightarrow (Ey)(M(y) \,\&\, (Az)(z\hat{e}y \rightarrow At;1(z)) \,\&\, (Az)(z\hat{e}y \rightarrow M(z)) \,\&\, x\approx y))$

Dette teoremet uttrykker at man til enhver mengde kan finne en likemektig mengde som utelukkende inneholder egenskaper som er mengder. Med andre ord vil de egenskaper som er urindivider, om slike finnes, bare kunne oppta en infinitisimal del av hele egenskapsuniverset i E;3. Dette kan virke noe underlig og det er nærliggende å stille det spørsmål om man ikke kan postulere at alle egenskaper er urindivider, mao. man kunne betrakte det følgende aksiom:

E8 $(Ax)(At;1(x) \rightarrow x\hat{e}Ur)$

Imidlertid er dette aksiomet inkonsistent med E;3 siden man kan vise at M(Ur). I lys av utsondringsaksiomet og E8 følger i så fall at M(Mg(x: At;1(x)). Men negasjonen av denne siste påstand kan bevises i E;3. Det følger derfor at man ikke kan legge til E8 som et nytt aksiom til E;3 uten at det oppstår motsigelser.

Hvis man derfor vil insistere på E;8 må man endre eller sløyfe noen av de mengdeteoretiske aksiomene. Det mest naturlige er å sløyfe urmengdeaksiomet som sier at mengden av urindivider eksisterer. Man kan altså betrakte den teorien som fremkommer fra E;3 når urmengdeaksiomet fjernes og man istedet legger til formelen E8 som et nytt aksiom. La oss kalle denne teorien for E;4. Man kan stille spørsmålet om denne teorien er konsistent relativt til ZFC. Ved det nuværende tidspunkt er dette ikke avgjort og en nærmere analyse av teorien E;4 får utstå til eventuelle senere arbeider.

§18 Om strukturen til universet av egenskaper.

Teorien E;3 er en utvidelse ZFCu(L;e) som i sin tur er en modifisert versjon av ZFC. I et annet arbeid, Rognes [5] har vi kommentert enkelte sider ved Teorien ZFCu(L;e). Siden E;3 er en utvidelse av denne teorien følger det alle de teoremer som kan utledes i ZFCu(L;e) også kan utledes i E;3.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Nå er den naturlige modell for ZFCu(L;e) det mengdeunivers man får når man starter med den eventuelt tomme mengden av urindivider, dvs. mengden av ikke-mengder, som nivå 0 og suksesivt danner de resterende nivåer a for hvert ordinaltall a utfra tidligere nivåer etter det følgende mønster: Er a et ordinaltall og nivå a – la oss kalle det V(a) – definert, så er det etterfølgende nivå, V(a+1) definert som den mengden man får når man til V(a) legger til alle delmengder av V(a). Mao. har man at V(a+1)= V(a) U Pt(V(a)). Merk at ikke alle delmengdene av V(a) behøver å være med i V(a). Det som så langt er nevnt innebærer at V(a) er definert for 0 og alle ordinaltall av typen b+1, dvs. alle etterfølger-ordinaltall. Er imidlertid a et grenseordinaltall (limesordinal) er V(a) konstruert som unionen av alle tidligere nivåer, ie. unionen av alle V(b) der b<a. Man kan altså sette V(a)= UN/b<a/(V(b)) om a er et limesordinal. Mengdesekvensen <V(a)>/aêOn/ kalles for det kumulative mengdehierarki. Unionen av alle de diverse nivåene i dette hierarki, dvs. UN(Mg(V(a): aêOn)) kalles for det kumulative mengdeunivers. Det kumulative mengdehierarki kan defineres ved transfinit induksjon innenfor rammen av ZFCu(L;e), og derfor innenfor rammen av E;3, på den følgende måte:

(1) (i) V(0) = Ur
(ii) V(a+1) = V(a) U Pt(V(a))
(iii) V(a) = UN(Mg(V(b): b<a)) om aê K;II

Merk at "K;II" her betegner klassen av alle grenseordinaltall og at mengden av urindivider, Ur, er definert ved: Ur = Mg(x: ¬M(x)).

Det kumulative hierarki er en svært naturlig begrepsdannelse og det følgende teorem som er bevisbart i E;3 angir noen viktige egenskaper ved det:

Teorem 46 (i) (Aa)(aêOn –> M(V(a)))
(ii) (Ax)(xêUN(Mg(V(a): aêOn))
(iii) (Ax)(M(x) <–> xê(UN(Mg(V(a): aêOn))–Ur))
(iv) (Aa)(Ab)(a≤b –> V(a) Inkl V(b))
(v) (Aa)(aêOn –> (xêy & yêV(a+1) –> xêV(a)))
(vii) aêOn & xêV(a) –> x Inkl V(a)
(viii) aêOn –> V(a)êV(a+1)
(ix) a,bêOn & a<b –> V(a)êV(b)

Som man ser fra dette teoremet er ethvert nivå i det kumulative mengdehierarki en mengde (pkt (i)), videre er enhver entitet med i hierarkiet, og noe er en mengde hvis og bare hvis det hører med på et eller annet nivå bortsett fra det første. (pkt. (i) - (iii)) Man ser at hvert nivå inkluderer det foregående og forøvrig alle tidligere nivåer og at ethvert nivå er et element i alle senere nivåer, dessuten at hvert nivå er en transitiv mengde, dvs. for hvert ordinaltall a gjelder det at elementer i elementer som er med i nivået a selv er med i nivået a (pkt. (iv) – (ix))

Man kunne si at det kumulative mengdeunivers utgjør det grunnleggende entitetområde som teorien E;3 uttaler seg om.

Rangen til et objekt x er ordinaltallet til det laveste nivået i det kumulative hierarki hvor x er et element. Vi betegner rangen til et objekt x med "Rang(x)" og definerer uttrykket formelt på følgende måte:

(3) Rang(x) = μa(aêOn & xêV(a))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Det følger fra denne definisjonen at alle urindividene har rang 0 og at enhver mengde har rang ≥1. Er X en mengde definerer vi mengden av alle egenskaper over X, som vi her betegner med "Eg(X)", som mengden av alle egenskaper hvor ekstensjonen i hver mulig verden er inkludert i mengden X. Dette begrepet kan formelt defineres slik:

(4) Eg(X) = Mg(y: At;1(y) & (Aw)(wêI –> Ekst;w(y)êX)

Tidligere definerte vi uttrykket "At;n(X,y)" (n≥1). Sammenligner man den definisjonen som ble gitt av dette uttrykket i §15 med (4) ovenfor er det trivielt å se at man har: Eg(X) = Mg(y: At;1(X,y)). Vi bruker her notasjonen "Eg(X)" for å understreke at vi har med en operasjon å gjøre som til enhver mengde tilordner en mengde med egenskaper. Det følgende teorem oppsummerer noen viktige trekk ved operasjonen Eg:

Teorem 47 (i) (M(x) & M(y) & x Inkl y) –> Eg(x) Inkl Eg(y)
(ii) (M(x) & M(y) & x SInkl y) –> Eg(x) SInkl Eg(y)
(iii) a,bêOn & a<b –> Eg(V(a)) SInkl Eg(V(b))
(iv) (Aa)(aêOn –> M(Eg(V(a)))
(v) (Ax)(At;1(x) <–> xêUN(Mg(Eg(V(a)): aêOn)))

Som man ser sier dette teoremet at Eg(x) er inkludert i Eg(y) om x er inkludert i y. Som et spesialtilfelle har man derfor at Eg(V(a)) er inkludert i Eg(V(b)) om a og b er ordinaltall og a<b. I sekvensen <Eg(V(a))>/aêOn/ vil derfor de enkelte ledd være stadig mer omfattende mengder av egenskaper. De to siste punktene i teoremet sier at hvert ledd i denne ekvensen er en mengde og at unionen av alle mengdene i sekvensen utgjør nøyaktig mengden av alle unære attributter.

Figuren på den neste side er ment som en helt uformell illustrasjon til visse aspekter ved universet av egenskaper i E;3. Punktene som er avmerket på linjen L er det meningen at skal representere de mulige verdenene tatt i en bestemt rekkefølge. De enkelte V-formede sektorer hvis spiss berører linjen L i punktene w;0, w;1, w;2 .... etc. tenker vi oss at representerer det kumulative mengdehierarkiet over V(0). De enkelte delsektorene V(0), V(1), V(2),.... representerer følgelig de enkelte nivåer i dette hierarkiet. På figuren har vi antydet dem opp til nivå V(a) for et eller annet ordinaltall a. Siden det til enhver egenskap x ifølge E;3 finnes en entydig bestemt ekstensjonsfunksjon, la oss kalle den f(x), som til hver mulig verden w tilordner en mengde f(x)‘w har vi at de enkelte f(x)‘w, for wêI, vil være elementer i det kumulative hierarkiet, og derfor mengder med en bestemt rang. På figuren har vi antydet to egenskaper e;1 og e;2. Ekstensjonen til f.eks. egenskapen e;1 i verdenen w;0 er representert ved punktene innenfor området merket f(e;1)‘w;0. Som man ser av figuren tenker vi oss da at f(e;1)‘w;0 har en rang som er mindre enn *w* +1.

Vi definerte tidligere uttrykket "EFunc;n(x)" som betegner ekstensjonsfunksjonen til den n-ære egenskapen x. Dessuten ble det tidligere gitt en definisjon av funksjonen q;n som tilordner enhver n-ær egenskap dens ekstensjonsfunksjon. Siden vi nå bare arbeider med unære egenskaper begrenser vi oss til å betrakte q;1 og EFunc;1(x) for unære egenskaper x. Det kan være gunstig å minne om at man har:

(5) EFunc;1(x) = Mg(<w,Ekst;w(x)>: wêI)
(6) q;1 = Mg(<x,EFunc;1(x)>: At;1(x))

Fra disse definisjonene og definisjonen av Eg(x) ser man da at man må ha:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 48 (E;3) Er aêOn gjelder følgende:
Rest(q;1,Eg(V(a)) : Eg(V(a)) –(1-1,på)–> Exp(Pt(V(a)),I)

Her er I selvfølgelig mengden av mulige verdener. Det bør bemerkes i denne forbindelse at siden V(a) og I er mengder så er også Exp(Pt(V(a)),I) en mengde. Fra dette, replacementaksiomet og teoremet ovenfor følger da at Eg(V(a)) er en mengde. Det kan også noteres at dersom xêExp(Pt(V(a)),I) så er x en funksjon, altså en mengde med ordnete par. Det følger i så fall at rangen til x i det minste er større eller lik 4. Rangen til x vil være 4 dersom a=0, dvs. hvis V(a)=V(0). I alle tilfelle vil rangen til x være større en rangen til I siden x Inkl Prod(Pt(V(a)),I).

Det kan også bemerkes at det er forenelig med aksiomene i E;3 å anta at I er en mengde hvor rangen er et meget høyt kardinaltall siden de enkelte mulige verdenene kan ligge spredt høyt oppover i det kumulative hierarkiet. Likevel kan attributtet (q;1);-1(x) som har x som sin ekstensjonsfunksjon ha en rang som er meget lavere enn x. Den kan være 0 om attributtet er et urindivid, men det kan også være større enn 0 om x er en mengde på et eller annet nivå.

Operasjonen Eg(X) ligner noe på potensmengde-operasjonen. Ved hjelp av Eg kan vi definere et kumulativt egenskapshierarki på samme måte som vi definerte det kumulative mengdehierarkiet. Dette kan gjøres ved den følgende definisjon:

(7) (i) EG(0) = Ur
(ii) EG(a+1) = EG(a) U Eg(EG(a))
(iii) EG(a) = UN(Mg(EG(b): b<a)) om bêK;II

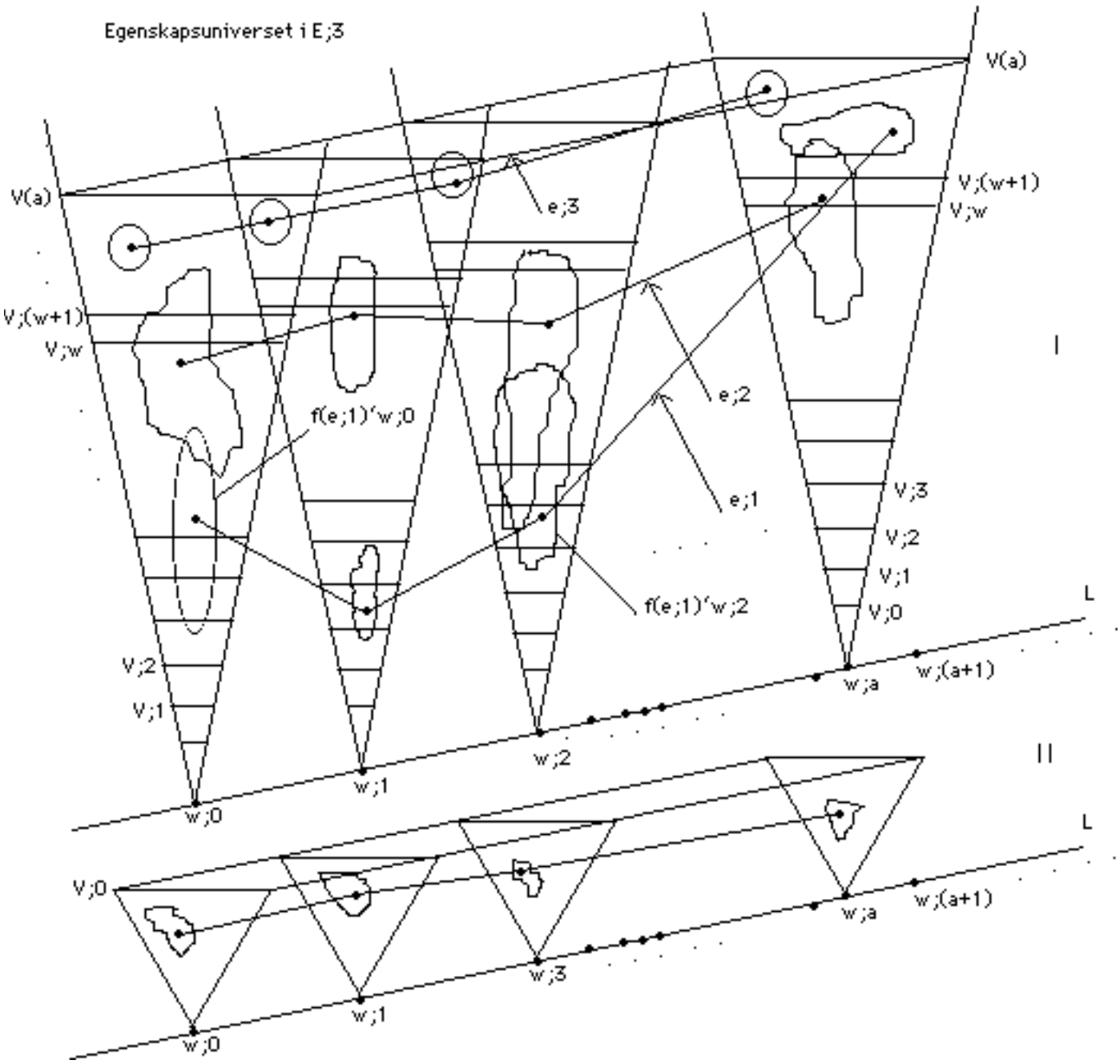
Entitetene på null-nivået i dette hierarkiet, EG(0), utgjøres altså av urindividene. Er nivået EG(a) gitt, er entitetene på nivået EG(a+1) alle dem som inngår i EG(a) pluss alle egenskapene over EG(a), ie. Eg(EG(a)). Er a et grenseordinaltall er EG(a) summen av alle de foregående nivåer. Det bør imidlertid noteres at hierarkiet <EG(a)>/aêOn/ ikke er identisk med sekvensen <Eg(V(a))>/aêOn/.

Vi definerte tidligere hva vi forsto ved et rigid attributt. Dette var en egenskap som hadde samme ekstensjon i alle mulige verdener. Med de rigide egenskapene over området X forstås nå mengden av alle de rigide egenskapene som har sin ekstensjon inkludert i mengden X. Mengden av rigide egenskaper over X betegner vi med Eg;r(X). I overenstemmelse med våre tidligere redegjørelser kan denne mengden formelt sett defineres slik:

(8) Eg;r(X) = Mg(y; At;1(y) & (Ea)(M(a) & a Inkl X &
(Aw)(wêI –> Ekst;w(y)=a)))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

FIGUR



Ved hjelp av denne definisjonen av Eg;r kan vi i analogi med (7) definere et kumulativt hierarki av rigide egenskaper på den følgende måte:

(9) (i) EG;r(0) = Ur
(ii) EG;r(a+1) = EG;r(a) U Eg;r(EG;r(a))
(iii) EG;r(a) = Un(Mg(EG;r(b): b<a)) om bêK;II

Endel kommentarer kan gis angående relasjonen mellom de diverse hierarkiene som har blitt definert. Endel av egenskapene til <EG(a)>/aêOn/ og <EG;r(a)>/aêOn/ er analoge med dem til <V(a)>/aêOn/. Vi har f.eks. :

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 49 (E;3) (i) (Aa)(aêOn –> M(EG(a)) & M(EG;r(a)))
(ii) a,bêOn & a≤b –> EG(a) Inkl EG(b) & EG;r(a) Inkl EG;r(b)
(iii) a,bêOn & a<b –> EG(a) SInkl EG(b) & EG;r(a) SInkl EG;r(b)
(iv) A;1 Ω Ur≠ø & a≥2 & aêOn –> EG;r(a) SInkl EG(a)

Det fremgår av dette teorem at <EG(a)>/aêOn/ og <EG;r(a)>/aêOn/ er sekvenser av stadig mer inklusive mengder, der hvert ledd i sekvensene eksisterer og der EG;r(a) er strengt inkludert i EG(a) for alle ordinaltall a der a≥2. Det er også nokså lett å se at alle elementene i UN(Mg(EG(a): aêOn)) – EG(0) er egenskaper. Vi har derfor at den følgende sats holder:

Teorem 50 (E;3) (UN(Mg(EG(a): aêOn) – EG(0)) Inkl Mg(x: At;1(x))

Det er naturlig å spørre om inklusjonen den andre veien holder i denne forbindelse. Dette spørsmålet åpner for noen mer interessante overveielser som ikke er av en helt triviell natur. Betrakter man intepretajonen q som ble definert i §16 ser man nokså lett at denne overfører formelen:

(A) (Ax)(At;1(x) –> x=EFunc;1(x))

til et teorem i teorien T;1. Dette innebærer at teorien E;3 utvidet med (A), dvs. E;3[A] er konsistent relativt til T;1 og dermed til ZFC. Nå kan man imidlertid vise at den følgende formel:

(C) (UN(Mg(EG(a): aêOn) – EG(0)) SInkl Mg(x: At;1(x))

er utledbar i E;3[A]. Siden (C) er logisk sett helt uforenelig med:

(D) (UN(Mg(EG(a): aêOn) – EG(0)) = Mg(x: At;1(x))

følger det at (D) ikke kan utledes i E;3. For var dette tilfelle ville E;3[D] være konsistent relativt til ZFC siden E;3 var det. Dette innebærer at man kan utlede en motsigelse i E;3[A] siden D er utledbar i E;3 per hypotese. Men siden E;3[A] er konsisten relativt til ZFC ville da også ZFC inneholde en motsigelse. Dette siste er imidlertid høyest usannsynlig. I alle tilfelle viser dette resonnementet at man ikke kan utlede inklusjonen den andre veien i Teorem 50 i E;3 om ZFC er konsistent.

Merk imidlertid at dette bare viser at (D) ikke er utledbar eller et teorem i E;3. Resonnementet viser ikke at (D) er inkonsistent med E;3, dvs. at negasjonen av (D) kan utledes i E;3. Vi har så langt ikke avgjort om E;3[D] er konsistent relativt til ZFC. Et nærmere studium av dette problem får utstå til senere.

Det vi nå vil gjøre er å relatere det kumulative mengdehierarki til det kumulative egenskapshierarki. I hovedsaken vil vi forsøke å vise hvordan mengdene i mengdehierarkiet kan en-entydig avbildes på visse egenskaper i egenskapshierarkiet på en naturlig måte.

Er x en mengde er det attributt som det virker mest nærliggende å korrelere med x det rigide attributtet som i hver mulig verden har mengden x som sin ekstensjon. Dette attributtet betegnes med "ß*(x)" og defineres slik:

(10) ß*(x) = (q;1);-1(Mg(<w,x>: wêI))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Fra denne definisjonen følger det umiddelbart at ß*(x)êA;1 om x er en mengde. Det vil være nærliggende om man ønsker , for hvert aêOn, å avbilde V(a) inn i EG(a) å tilordne elementene i V(a) rigide egenskaper i EG(a). Videre synes det fornuftig å kreve om f: V(a) –(1-1)–> EG;r(a) at restriksjonen av f til V(b) der b<a avbilder V(b) en-entydig inn i EG;r(b). Vi vil derfor definere en sekvens av funksjoner <f(a)>/aêOn/ som oppfyller de følgende krav: For det første avbilder f(0) mengden V(0) på mengden EG(0) på en slik måte at hvis xêV(0) så er f(0)‘x=x.
For det andre bør f(a) avbilde V(a) en-entydig inn i EG;r(a). For det tredje bør funksjonene i sekvensen være slik at hvis a,bêOn og a<b så har man at Rest(f(b),V(a))= f(a).

Den funksjonssekvensen vi har i tankene kan defineres induktivt på den følgende måte:

(11) (i) f(0) = Rest(Id, Ur) = Mg(<x,x>: xêUr)
(ii) f(a+1) = f(0) U Mg(<z, ß*(Mg(f(a)‘y: yêz)>: zêPt(V(a)))
(iii) f(a) = UN(Mg(f(b): b<a)) om bêK;II

Man kan nå faktisk vise at f= UN(Mg(f(a): aêOn)) har de ønskede egenskaper. Vi har:

Teorem 51 (E;3) Anta Rgn(ß*)Ω Ur =ø. Da gjelder:
(a) f(0)"V(0) = EG;r(0)
(b) (Aa)(aêOn –> f(a): V(a) –(1-1,på)–> EG;r(a))
(c) (Aa)(Ab)(a,b êOn & a≤b –> Rest(f(a),V(b))= f(b))

Teoremet ovenfor er av en viss interesse fordi det viser at alle elementene i hierarkiet <V(a)>/aêOn/ kan representereres på en forholdsvis naturlig måte ved hjelp av elementer i hierarkiet <EG(a)>/aêOn/. Anta x er en vilkårlig egenskap. Da har vi i lys av et tidligere teorem at xêV(a) for noe aêOn. Det følger i så fall at f(a)‘xêEG;r(a) Inkl EG(a). Dette innebærer også at alle egenskaper kan representeres ved elementer i hierarkiet <EG(a)>/aêOn/.[16]

§19 Det kumulative egenskapshierarki og intensjonelle språk.

I dette arbeidet er det ikke meningen å studere detaljert hvordan det kumulative egenskapshierarkiet <EG(a)>/aêOn/ kan beskrives innenfor rammen av forskjellige intensjonale språk. Dog skal det i denne paragrafen skisseres et slikt språk med tilhørende semantikk slik at man kan se hvordan dette i prinsippet kan gjøres innenfor rammen av E;3. Anta L er et vanlig første-ordens språk med identitet og uten ikke-logiske predikatsymboler. La oss betegne resultatet av å udvide L med en monadisk modaloperator "Nec", en termdannende egenskaps-operator ∂ på et variabeltegn og en formel, og den binære predikatkonstruksjon h med "L;p". Et uttrykk av typen "Nec(p)" der p er en formel leses "Det er logisk nødvendig at p". En term av typen "(∂x)p", der p er en formel, leses "egenskapen å være en x slik at p". Endelig leses uttrykk av typen "h(x,y)" som "x har egen-skapen y". Formlene og termene i L;p defineres på forventet måte ved en standard induktiv definisjon. Forøvrig kan språket L;p gis en presis mengde-teoretisk definisjon innenfor rammen av E;3.

16 En mer utførlig omtale av dette teorem er gitt i Rognes [6], Appendix I. Funksjonen f avbilder ikke bare V =Mg(V(a): aêOn) en-entydig på EG;r = Mg(EG;r(a): aêOn), men er også en isomorfi mellom disse to strukturene.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Denne utelates imidlertid her. Merk at hvis x er et variabeltegn i L;p og p er en formel så er (∂x)p en term i L;p.

Med en modell for L;p av type a forstår vi et ordnet par <v, EG(a)> der EG(a) er det kumulative egenskapshierarki opp til ordinaltallet a og v er en verditilordning for L;p, dvs. en funksjon som til hvert variabeltegn i L;p tilordner et element i EG(a).

I tilknytning til en modell M=<v,EG(a)> definerer vi hva som menes med "referansen til en term t i L;p relativt til M og verdenen w", "Ref(t,M,w)" og hva som menes med at en formel p i L;p er sann i verdenen w relativt til modellen M, i symboler "True(p,M,w)". Dette skjer ved den følgende simultane induktive definisjon, hvor det forutsettes at v er en vilkårlig verditilordning for L;p, og at w en vilkårlig mulig verden:

(i) Er t;1, t;2 to termer i L;p setter vi:
True(t;1=t;2, <v,EG(a)>,w) <–>
Ref(t;1,<v,EG(a)>,w) = Ref(t;2 ,<v,EG(a)>,w)

(ii) Er t;1, t;2 to termer i L;p setter vi:
True(h(t;1,t;2),<v,EG(a)>,w) <–>
Ref(t;1,<v,EG(a)>,w)êEkst;w(Ref(t;2,<v,EG(a)>,w))

(iii) Er x et variabeltegn i L;p settes:
Ref(x,<v,EG(a)>,w> = v(x)

(iv) Er x et variabeltegn i w og q en vilkårlig formel i L;p setter vi:
Ref((∂x)q,<v,EG(a)>,w) = (iy)(At;1(y) & (Aw)(wêI –>
Ekst;w(y) = Mg(zêEG(a): True(q, <v(x/z),EG(a)>,w)))

(v) Er q;1 og q;2 to formler i L;p og x et variabeltegn i L;p setter vi:
(a) True(¬q;1,<v,EG(a)>,w) <–> ¬True(q;1,<v,EG(a)>,w)
(b) True(q;1–>q;2,<v,EG(a)>,w) <–>
(True(q;1,<v,EG(a)>,w) –>True(q;2,<v,EG(a)>,w))
(c) True((Ax)q;1,<v,EG(a)>,w) <–>
(Ay)(yêEG(a) –> True(q;1,<v(x/y),EG(a)>,w))

(vi) Er q en formel i L;p setter vi:
True(Nec(q;1),<v,EG(a)>,w) <–>
(Aw')(w'êI –> True(q;1,<v,EG(a)>,w'))

Dette avslutter definisjonen av sannhet og referanse i L;p relativt til en mulig verden w og en modell <v,EG(a)> for L;p.

En formel q sies å være gyldig i L;p i universet EG(a) hvis og bare hvis man for enhver verditilordning v for L;p over EG(a), og enhver mulig verden w, har at True(q,<v,EG(a)>,w).

Man kan nå studere de gyldige formlene i EG(a) for de diverse aêOn og forsøke å aksiomatisere "så store deler" som mulig av disse formelmengdene. Det er mulig å vise at alle de vanlige teoremene i kvantifikasjonsteorien med identitet er gyldige i EG(a) for alle a>0. Videre kan man vise at de vanlig S5-aksiomene for operatoren Nec holder, og at slutningsregelen Th(q) –> Th(Nec(q)) samt universell generalisering og modus ponens bevarer gyldighet. Det er også nokså lett å vise at Barcan-formelen for Nec og formelen

(Ax)(Ay)(x=y –> Nec(x=y))

er gyldige. Når det gjelder operatoren ∂ kan man vise at "konkretiseringsloven" h(x,(∂y)q) <–> q;y[x] er gyldig. Vedrørende predikatet h kan man vise gyldigheten til setninger for dette som er helt analoge med de vanlige aksiomene for medlemskapspredikatet i teorien ZF.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Mao. kan modale analogier til de valige ZF-aksiomene, bortsett fra replacement og fundierungsaksiomet formuleres i L;p og vises å være gyldige. [17]

§20 Avsluttende bemerkninger.

I denne siste paragrafen vil vi se på muligheten av å redusere teorien E;3 til en teori som inneholder færre primitive predikater og færre ikke-logiske aksiomer.

Som man husker er Δ en mengde som inneholder seks ikke-logiske predikatkonstruksjoner, nemlig predikatene (3) – (8) som ble nevnt i §1. Vi kaller nå den mengden som bare inneholder et av disse predikatene, nemlig "x er en mulig verden" og absolutt ingen andre, for ∏. L;e(∏) vil da være språket L;e, dvs. språket for mengdelære, utvidet med dette ene predikatet "x er en mulig verden" som nytt ikke-logisk predikat. Teorien ZFCu(L;e[∏]) utvidet med U1 som eneste nye ikke-logiske aksiom kalles nå for E;5. Denne teorien er åpenbart mer begrepsøkonomisk enn teorien E;3.

Vi skal nå vise hvordan alle predikatene i Δ, bortsett fra predikatet "x er en mulig verden" kan defineres ved hjelp av predikatene i L;e[∏] og på en slik måte at alle aksiomene i E;3 kan utledes som teoremer i E;5 om denne teorien tenkes supplert med disse definisjonene.

Siden vi vet at μ er en en-entydig strukturbevarende avbildning mellom U og Pt(I) og at et utsagn er sant i verdenen w hvis og bare hvis w er et element i sannhetsmengden til utsagnet, er det naturlig å identifisere elementene i U med elementene i Pt(I). Videre vil det være naturlig identifisere sannhetsrelasjonen True med medlemskapsrelasjonen begrenset til Prod(I,Pt(I)). Dette er bakgrunnen for de følgende to definisjoner:

(1) Ut(x) <–> xêPt(I)
(2) True(w,x) <–> (<w,x>êProd(I,Pt(I)) & wêx)

Tenker man seg at E;3 forutsettes ser man at det er en naturlig en-entydig korrespondanse mellom egenskaper og ekstensjonsfunksjoner. Er Z en eller annen mengde med egenskaper vil det alltid finnes en mengde X slik at ekstensjonsfunksjonene til egenskapene i Z er med i Exp(Pt(X),I) og slik at egenskapene kan avbildes en-entydig inn i Exp(Pt(X),I). Det omvendte gjelder også. Det er derfor naturlig å identifisere egenskaper og ekstensjonsfunksjoner. Dette er bakgrunnen for de følgende definisjoner av predikatet "At;n(x)" og "H(x,y,w)":

(3) At;n(x) <–> (Ey)(M(y) & xêExp(Pt(y^n),I) & nê(N-{ø}))
(4) H(x,y,w) <–> (wêI & xêy(w) & (En)(nê(N-{ø}) &At;n(y)))

Tilslutt er det svært naturlig å definere det predikatet "x er et mulig individ", "MI(x)" ved:

(5) MI(x) <–> x=x

Det er nokså enkelt å vise at aksiomene E1 – E7, samt U2 – U4 kan utledes i E;5 om man oversetter dem til formler i L;e[∏] ved hjelp av definisjonene (1) – (5). Det følger fra dette at alle teoremene i E;3 er teoremer i E;5 siden slutningsreglene og de øvrige aksiomene er de

[17] Vi lar det bli med disse litt løse antydningene. Et arbeid som kan nevnes i denne forbindelse er E, Lemmon: "A Theory of attributes based on modal logic." Se Lemmon [1]. Også en rekke nyere arbeider kunne nevnes i denne forbindelse.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

samme i de to teoriene. Dette innebærer at disse definisjonene kan oppfattes som en reduksjon av teorien E;3 til den enklere teorien E;5.

Når vi har ventet med å presentere denne reduksjonen er grunnen at det virker fornuftig – før man forsøker å redusere eller definere visse begreper – å undersøke hvilke lover som det på et mer intuitivt grunnlag er rimelig å tro at gjelder for dem. I motsatt fall kan det være vanskelig å avgjøre om reduksjonen er adekvat eller ikke. Det er dette vi i meget stor utstrekning har gjort tidligere i dette arbeidet. Dessuten virker det ikke helt korrekt å si at definisjonene ovenfor er spesielt innlysende, eller at de f. eks. er mer innlysende enn de diverse aksiomene i L;e[Δ] som vi betraktet tidligere. Snarere synes det motsatte å være tilfelle. De aksiomene i L;e[Δ] som tidligere har blitt presentert kan ved første øyekast virke rimeligere enn definisjonene (1) – (5) og hvis man blir bedt om å begrunne disse definisjonene synes det svært vanskelig å gjøre dette uten å trekke inn de prinsippene som vi har nevnt i forbindelse med de egenskapsteoriene vi har definert og undersøkt.

Er så definisjonene ovenfor adekvate? Det kan ikke være nødvendig å gi noe kategorisk svar. Men hvis det er naturlig å oppfatte mulige verdener, utsagn og egenskaper som entiteter som ikke er mengder – og en del kan sies til fordel for dette syn – kan neppe definisjonene ovenfor sies å være dekkende fordi de ganske enkelt impliserer det motsatte. Betrakter man f. eks. teorien E;4 som ble definert i §17, fant vi at denne trolig er en konsistent teori. Men i denne teorien inngår E8 : (Ax)(At;1(x) –> xêUr) som et ikke-logisk aksiom. Dette innebærer at E;5 supplert med definisjonene (1) –(5) er direkte uforenelig med denne teorien. Disse definisjonene kan derfor åpenbart ikke representere noen adekvat reduksjon av teorien E;4. Hvis man nå innvender at teorien E;5 er en enklere teori enn E;4, og at i en slik situasjon, hvor store deler av denne sistnevnte teori kan reduseres til E;5, bør enkelhet veie tyngere enn ens intuisjoner om hva det er naturlig å betrakte som ikke-mengder, kan man replisere at dette prinsipp i seg selv ikke virker direkte opplagt. Og man kunne også legge til at vektigheten av dette argument vil være avhengig av om man kan utlede det fra noe som er mer innlysende. Men man kan også spørre om teorien E;5 utvidet med de nevnte definisjoner egentlig er så mye enklere enn E;4. Er ikke disse definisjonene ganske kompliserte? Og hvorfor skal man tillegge enkelhet av denne typen noen vekt i det hele tatt?

Uansett ville det være noe besynderlig om slike overveielser skulle hindre en i å formulere og undersøke slike teorier som E;1 – E;4 som åpenbart utgjør en nødvendig og nyttig bakgrunn for å vurdere slike reduksjonsforslag som det representert ved definisjonene (1) – (5).

Vi har nå kommet til veis ende og nådd vårt hovedmål. Dette var å formulere grunnleggende, intuitivt sett forholdsvis rimelige prinsipper av forholdsvis generell natur, for de ikke-mengdeteoretiske konstruksjonene i L;e[Δ], samt å undersøke forholdet mellom disse prinsippene. Siden vi ikke har funnet noen enkle "knock-down"-argumenter mot meningsfullheten til disse konstruksjonene, og heller ikke har oppdaget noen avgjørende argumenter mot f.eks. en slik teori som E;3, synes det som om vi har fullført en viktig og høyest påkrevd oppgave. To bemerkninger helt til slutt: I et supplement til dette arbeidet vil vi gi detaljerte bevis for alle de teoremene som har blitt fremlagt her. Det bør også nevnes at vi i andre arbeider vil ta opp endel sider ved de teoriene vi har formulert, sider som det av plasshensyn har vært umulig å behandle utførlig innenfor rammen av dette skrift.[18]

[18] Se Rognes [6].

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Referanser

Referanser

Carnap [1], Carnap, Rudolf, *Meaning and Necessity* , The University of Chicago Press, Chicago & London, 1956
Cresswell [1], Cresswell,M.J., *Logics and Language* , Methuen &Co. Ltd., 1973
Hughes & Cresswell [1], Hughes and Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen & Co. Ltd., 1968
Kripke [1], Kripke, Saul A., "Semantical analyis of modal logic I. Normal modal propositional calculi.", *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen der Mathematik.,* Bd.9, side 67 - 96, 1963
Hintikka [1], Hintikka, J., *Models for modalities. Selected essays*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht Holland, 1969
Kripke [1], Kripke, Saul, *Naming and necessity*, Harvard University Press, 1972, 1980
Lemmon [1], Lemmon, E. J., "A theory of attributes based on modal logic", Acta Philosophica Fennica., Modal and many-valued logics, side 95 - 122, 1963
Popper [1], Popper, Karl R., *Objective Knowledge. An Evolutionary approach* , Oxford,Clarendon Press, 1972
Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [4], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [5], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [6], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del II, Bevis for teoremer.*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Scott [1], Scott, Dana, "Advice on modal logic.", Philosphical Problems in Logic. (Ed. K. Lambert), Dordrecht Reidel, 1970, side 143 - 173.

*

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk* .

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.